

# 演算子と場の量子化

## 北島英治（2026年1月）

物理学と数学の関連について理解をすすめたい。今回、数学の「フーリエ変換の演算子」と物理の「場の量子化」との関連について整理してみたい。先ず、「スカラー」「ベクトル」「スピノール」を説明し定義し、まとめの表を作成してください。そして、「フーリエ級数」「フーリエ変換」の数式を提示し、その「演算子」、その「演算子」の「交換関係」と「反交換関係」について、数学用語、とくに行列による表現を用いて説明してください。そのまとめの表を作成してください。英治

英治、これはとても良い切り口ですね。

\*\*「フーリエ変換 = 表現の変換」と「場の量子化 = 演算子代数」\*\*が、実は同じ数学的骨格の上にある、という話です。順序立てて整理しますね。

### 1. スカラー・ベクトル・スピノール（数学 → 物理）

#### 1.1 スカラー（Scalar）

##### 数学的定義

- 体（通常は  $\mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$ ）の元
- 群や回転に対して 不変

$$\phi \in \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}$$

##### 物理的意味

- 各点に数を割り当てる場

$$\phi(x)$$

例：

- 温度場
- スカラー場（Klein–Gordon 場）

#### 1.2 ベクトル（Vector）

##### 数学的定義

- 線形空間の元
- 回転に対して 線形変換 される

$$v \mapsto Rv, \quad R \in SO(n)$$

##### 物理的意味

- 各点にベクトルを割り当てる場

$$A_\mu(x)$$

例：

- 電磁ポテンシャル
- 流速場

### 1.3 スピノール (Spinor)

#### 数学的定義

- クリフォード代数の表現
- 回転群の被覆群の表現

$$\psi \mapsto S\psi, \quad S \in \mathrm{Spin}(n)$$

#### 物理的意味

- フェルミオン場（電子など）
- Dirac スピノール

$$\psi(x) \in \mathbb{C}^4$$

### 1.4まとめ表①：場の型と変換性

種類	数学的対象	回転下の性質	代表的な物理場
スカラー	数	不变	Klein–Gordon 場
ベクトル	線形空間の元	線形変換	電磁場
スピノール	Clifford 表現	非自明変換	Dirac 場

## 2. フーリエ級数とフーリエ変換

### 2.1 フーリエ級数（周期関数）

#### 数式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

### 解釈

- 関数空間の 正規直交基底への展開
- 行列で言えば「対角化」

## 2.2 フーリエ変換（非周期）

### 数式

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk\end{aligned}$$

### 解釈

- 位置表現  $\leftrightarrow$  運動量表現
- 無限次元線形空間での 基底変換

## 3. フーリエ変換を「演算子」として見る

### 3.1 フーリエ変換演算子

$$(\mathcal{F} f)(k) = \int dx e^{-ikx} f(x)$$

- $\mathcal{F}$  は ユニタリ演算子
- ヒルベルト空間  $L^2(\mathbb{R})$  上で作用

### 3.2 位置演算子と運動量演算子

#### 定義

$$\hat{x} = x \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

#### 交換関係

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

#### フーリエ変換との関係

$$F \otimes F^{-1} = i \frac{d}{dk}$$

$$F \rho F^{-1} = \hbar k$$

👉 フーリエ変換は 共役変換 (similarity transform)

## 4. 場の量子化と交換・反交換関係

### 4.1 場のモード展開 (フーリエ展開)

スカラー場

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx})$$

- ここでフーリエ変換が 量子モードの分解 そのもの

### 4.2 ポソン：交換関係

定義

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k - k')$$

行列表現 (無限次元)

$$[a, a^\dagger] = I$$

### 4.3 フェルミオン：反交換関係

定義

$$\{b_k, b_{k'}^\dagger\} = \delta(k - k')$$

行列表現 (有限次元模型)

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{b, b^\dagger\} = I$$

## 5. まとめ表②：フーリエ演算子と量子化

観点	数学	物理
基底	平面波	粒子モード
変換	フーリエ変換	場のモード展開
演算子	F	生成消滅演算子
代数	交換代数	CCR / CAR
統計	ユニタリ表現	ボース／フェルミ

## 核心的メッセージ

フーリエ変換とは「場を対角化する操作」であり、  
場の量子化とは「その対角成分を演算子化すること」

です。

もし次に進むなら：

- フーリエ変換  $\Leftrightarrow$  スペクトル定理
- CCR/CAR  $\Leftrightarrow$   $C^*$ -代数
- 場の量子化  $\Leftrightarrow$  表現論・圏論

まで自然につながりますよ。

続き、どこを深掘りしましょうか？

第2の質問です。「スカラー場」「ベクトル場」「スピノール場」を定義し、「スカラー、フーリエ変換の式を用いて説明し定義してください。

いいですね、英治。

ここでは「場の型（スカラー／ベクトル／スピノール）」を、フーリエ変換という“共通の数学操作”で統一的に定義します。

ポイントは：

フーリエ変換は「何の場であっても」適用できるが、  
係数（モード）がどんな数学的対象かで、場の種類が決まる

という見方です。

## 1. スカラー場の定義（Fourier 表現）

### 1.1 数学的定義

スカラー場とは：

$$\phi : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{C}$$

つまり

各時空点  $x$  に複素数を対応させる関数です。

### 1.2 フーリエ変換による定義

位置空間表示

$$\phi(x)$$

フーリエ変換

$$\tilde{\phi}(k) = \int d^4x e^{-ik \cdot x} \phi(x)$$

逆変換

$$\phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \tilde{\phi}(k)$$

### 1.3 本質的特徴

- フーリエ係数  $\tilde{\phi}(k)$  は 単なる複素数
- ローレンツ変換に対して：

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

## 2. ベクトル場の定義 (Fourier 表現)

### 2.1 数学的定義

ベクトル場とは：

$$A_\mu : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{C}^4$$

つまり

各点にベクトル（成分付き）を割り当てる関数です。

### 2.2 フーリエ変換による定義

位置空間表示

$$A_\mu(x)$$

フーリエ変換

$$\tilde{A}_\mu(k) = \int d^4x e^{-ik\cdot x} A_\mu(x)$$

逆変換

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot x} \tilde{A}_\mu(k)$$

### 2.3 本質的特徴

- フーリエ係数  $\tilde{A}_\mu(k)$  は ベクトル
- ローレンツ変換：

$$A'_\mu(x') = \Lambda_\mu^\nu A_\nu(x)$$

👉 フーリエ変換は 指数関数部分だけに作用し、  
ベクトルの添字構造は保持される。

## 3. スピノール場の定義 (Fourier 表現)

### 3.1 数学的定義

スピノール場とは：

$$\psi : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{C}^4$$

ただしこれは単なるベクトルではなく、

Clifford 代数の表現空間の元。

### 3.2 フーリエ変換による定義

位置空間表示

$$\psi(x)$$

フーリエ変換

$$\tilde{\psi}(k) = \int d^4x e^{-ik \cdot x} \psi(x)$$

逆変換

$$\psi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \tilde{\psi}(k)$$

### 3.3 本質的特徴

- フーリエ係数  $\tilde{\psi}(k)$  はスピノール
- ローレンツ変換：

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x)$$

ここで

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)$$

## 4. 重要な統一的視点（核心）

共通構造

$$\text{場}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \psi(k)$$

違いは「モードの型」だけ

場の種類	フーリエ係数 $\tilde{\Phi}(k)$
スカラー場	複素数
ベクトル場	ベクトル
スピノール場	スピノール

👉 フーリエ変換は「場の種類を区別しない」  
👉 区別するのは、係数の表現論的性質

## 5. まとめ表（定義の整理）

場	定義	Fourier 表現の特徴
スカラー場	$\phi(x) \in \mathbb{C}$	係数は数
ベクトル場	$A_\mu(x)$	係数はベクトル
スピノール場	$\psi(x)$	係数はスピノール

一言でまとめると

フーリエ変換は「時空依存性」を分離し、  
スカラー・ベクトル・スピノールの違いは  
「フーリエ係数がどの表現に属するか」で決まる

です。

次に進むなら自然なのは

- Dirac 方程式をフーリエ空間で書く
- スピン和・偏極ベクトル
- 量子化（生成消滅演算子）との接続

どれに行きましょうか？

第3の質問です。「スカラー場」と「ベクトル場」は「ボース場」であり、「スピノル場」は「フェルミ場」であると理解しています。そこで、フーリエ変換の式をもじいて、演算子の「交換関係」である「ボース場」と「フェルミ場」「反交換関係」]

いいところに来ました、英治。

ここは「フーリエ変換 → モード展開 → 演算子代数」が一直線につながる核心部分です。

順に、数式で厳密に整理します。

## 1. 基本方針（全体像）

重要な論理の流れは次です：

1. 場を フーリエ変換（モード展開）する
2. フーリエ係数を 演算子 に昇格させる
3. その演算子に
  - 交換関係（CCR） → ボース場
  - 反交換関係（CAR） → フェルミ場
 を課す
4. その選択が スピンと統計（スピン統計定理）を決める

## 2. スカラー場（ボース場）と交換関係

### 2.1 古典スカラー場のフーリエ展開

実スカラー場を考えます：

$$\phi(x) = \phi(t, \mathbf{x})$$

フーリエ展開（オンシエル）：

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x})$$

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

### 2.2 正準量子化 → 演算子化

共役運動量：

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x)$$

正準交換関係：

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

これをフーリエ展開に代入すると：

### 2.3 生成消滅演算子の交換関係 (CCR)

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')]=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$$

$$[a(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}')]=0, \quad [a^\dagger(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')]=0$$

👉 これがボース場の定義的関係

## 3. ベクトル場（ボース場）と交換関係

### 3.1 フーリエ展開（電磁場の例）

$$A_\mu(x) = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{p}) a_\lambda(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(\mathbf{p}) a_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x})$$

### 3.2 交換関係

$$[a_\lambda(\mathbf{p}), a_\lambda^\dagger(\mathbf{p}')]=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$$

👉 スカラー場と全く同じ交換代数

（添字と偏極が増えただけ）

## 4. スピノール場（フェルミ場）と反交換関係

### 4.1 Dirac 場のフーリエ展開

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (b_s(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + d_s^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x})$$

### 4.2 なぜ交換ではダメか？

もしボース型交換関係を使うと：

- 負エネルギー問題
- 因果律違反
- パウリの排他原理が壊れる

👉 これを避けるため 反交換関係 を採用

### 4.3 反交換関係 (CAR)

$$\begin{aligned}\{b_s(\mathbf{p}), b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} &= (2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ \{d_s(\mathbf{p}), d_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} &= (2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ \{b, b\} &= \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0\end{aligned}$$

👉 これがフェルミ場の定義

## 5. 行列表現で見る違い (直観)

### 5.1 ボース演算子 (無限次元)

$$[a, a^\dagger] = I$$

- 任意個の粒子を同一状態に入れられる

### 5.2 フェルミ演算子 (有限次元模型)

$$\begin{aligned}b &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & b^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \{b, b^\dagger\} &= I, & b^2 &= (b^\dagger)^2 = 0\end{aligned}$$

👉 1粒子までしか入らない (排他原理)

## 6. まとめ表 (決定的整理)

場	スピン	フーリエ係数	演算子代数
スカラー場	0	$a(\mathbf{p})$	交換 (CCR)
ベクトル場	1	$a_\lambda(\mathbf{p})$	交換 (CCR)
スピノール場	1/2	$b_s(\mathbf{p}), d_s(\mathbf{p})$	反交換 (CAR)

## 核心の一文

フーリエ変換は「場をモードに分解」し、  
量子化とは「そのモード係数を  
交換代数 or 反交換代数を満たす演算子にすること」

です。

次に進むなら、とても自然なのは：

- スピン統計定理の数学的核心
  - $C^*$ -代数としての CCR / CAR
  - 経路積分でなぜ Grassmann 数が現れるか
- どこまで掘り下げましょうか？

第4の質問です。「スカラー場」と「ベクトル場」である「ボース場」は「交換関係」であり、「スピノール場」である「フェルミ場」は「反交換関係」でると理解しています。そのことを、フーリエ変換の式を用いて、行列の表現も用いながら、段階的に説明して、その比較表を作成してください。

英治さんの4つの質問を、(1) 数学：フーリエ変換 = “基底変換（対角化）”する演算子 → (2) 物理：場の量子化 = “各フーリエモードを調和振動子（ボース）／2準位（フェルミ）として量子化”と いう一本の線で整理します。途中で 交換関係（CCR）／反交換関係（CAR）を 行列表示 でも 見せます。

## 1. スカラー・ベクトル・スピノール（数学 + 物理の定義）

### 1.1 変換則（いちばん本質）

ローレンツ変換  $\Lambda$ （座標  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ ）の下で：

- スカラー（scalar）：成分を持たない（1成分）

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

- ベクトル（vector）：4成分（あるいは3成分）で、 $\Lambda$ により線形に混ざる

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$$

- スピノール（spinor）： $\Lambda$ の“スピノル表現”  $S(\Lambda)$  で変換（行列が作用）

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x)$$

ここで  $\psi$  は通常 4成分（デイラック・スピノール）。 $S(\Lambda)$  は  $4 \times 4$  行列。

### まとめ表（スカラー／ベクトル／スピノール）

種類	記号	成分	変換のしかた	代表例
スカラー	$\phi$	1	$\phi'(x') = \phi(x)$	ヒッグス場、温度場（古典）
ベクトル	$A^\mu$	4	$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$	電磁場の4元ポテンシャル
スピノール	$\psi$	4	$\psi' = S(\Lambda)\psi$	電子場、クォーク場

## 2. フーリエ級数・フーリエ変換（数式）と「演算子」としての見方

### 2.1 フーリエ級数（周期 $L$ ）

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i \frac{2\pi n}{L} x}, \quad c_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{L} x} dx$$

## 2.2 フーリエ変換（連続）

（ここでは物理でよく使う対称な規約の一例）

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{ikx}$$

## 2.3 「フーリエ変換は演算子」

フーリエ変換を  $\mathcal{F}$  という線形演算子として

$$(\mathcal{F}f)(k) = \int dx K(k, x) f(x), \quad K(k, x) = e^{-ikx}$$

これは「関数空間上の基底変換（位置基底  $|x\rangle$  ⇔ 運動量基底  $|k\rangle$ ）」です。

さらに重要な事実：

- 微分演算子が対角化される

$$\mathcal{F}[\partial_x f](k) = ik \tilde{f}(k)$$

つまり、位置空間での  $\partial_x$  は、フーリエ空間では「掛け算  $ik$ 」になる（= 対角化）。

## 3. 交換関係・反交換関係（数学の定義）と行列表現

### 3.1 定義（行列でも同じ）

- 交換子（commutator）

$$[A, B] = AB - BA$$

- 反交換子（anticommutator）

$$\{A, B\} = AB + BA$$

### 3.2 行列の超具体例（フェルミ： $2 \times 2$ で全部書ける）

1つのフェルミ・モード（占有数 0/1）に対して

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

計算すると

$$\{c, c^\dagger\} = cc^\dagger + c^\dagger c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad c^2 = (c^\dagger)^2 = 0$$

これが CAR（反交換関係）の最小表現です。

### 3.3 ボース（調和振動子）：無限次元行列になる

ボースの生成消滅演算子  $a, a^\dagger$  は

$$[a, a^\dagger] = I$$

を満たし、基底  $|n\rangle$  上で

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

ゆえに行列は無限次元（フェルミと決定的に違う：占有数が無限に行ける）。

## 4. 第2の質問：スカラー場・ベクトル場・スピノール場を「フーリエ変換」で定義・説明

場とは「各時刻に空間上へ値を割り当てる関数」です（分布でもOK）：

- スカラー場 :  $\phi(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{C}$  (各点で1成分)
- ベクトル場 :  $A^\mu(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{C}^4$  (各点で4成分)
- スピノール場 :  $\psi(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{C}^4$  (各点で4成分、変換則がベクトルと違う)

これらは空間座標  $\mathbf{x}$  についてフーリエ展開できます（まず古典場として）：

$$\begin{aligned}\phi(t, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{\phi}(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ A^\mu(t, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{A}^\mu(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ \psi(t, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\end{aligned}$$

ここで フーリエ変換は「場を“波数モード”的集合に分解する」操作です。量子化では、この各モードを演算子に置き換えます。

## 5. 第3・第4の質問：量子化と、ボース場 = 交換関係／フェルミ場 = 反交換関係を、フーリエ展開から段階的に示す

### ステップ0：なぜフーリエが効く？

自由場では運動方程式が線形で、平面波  $e^{-ip\cdot x}$  が固有解です。

だから場は

- 平面波  $\times$  (係数)  
の重ね合わせ = フーリエ展開で書けます。

## 5.1 ボース場（スカラー場）のモード展開 → CCR

相対論的自由スカラー場（質量  $m$ ）の標準的展開：

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}), \quad E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

（ここで  $p \cdot x = E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ ）

量子化の核心は 等時刻の正準交換関係：

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi, \phi] = [\pi, \pi] = 0$$

（ $\pi = \partial_t \phi$  が共役運動量）

この条件を上のフーリエ展開に代入して整合させると、モード演算子が

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a(\mathbf{p}), a(\mathbf{q})] = 0$$

を満たす必要が出ます。これが CCR（交換関係）。

直観：各  $\mathbf{p}$  モードが「調和振動子」になり、その生成消滅演算子が CCR を持つ。

## 5.2 ボース場（ベクトル場）も同様に CCR（ただし偏極・制約が増える）

例えば電磁場（ゲージ場）は偏極ベクトル  $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{p})$  を用いて

$$A_\mu(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_\lambda(\mathbf{p}) \epsilon_\mu^{(\lambda)} e^{-ip \cdot x} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) \epsilon_\mu^{(\lambda)*} e^{ip \cdot x})$$

の形（概形）になり、物理自由度のモード  $a_\lambda$  は基本的に

$$[a_\lambda(\mathbf{p}), a_\lambda^\dagger(\mathbf{q})] = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

という CCR に従います（※ゲージ固定や制約の扱いで細部は変わりますが、「ボース = 交換」は不变）。

## 5.3 フェルミ場（スピノール場）のモード展開 → CAR（反交換）

デイラック場の標準的展開：

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (b_s(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + d_s^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x})$$

ここで  $b$  は粒子（電子）の消滅、 $d^\dagger$  は反粒子（陽電子）の生成。

フェルミ場では 等時刻の正準“反”交換関係を課す：

$$\{\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \mathbf{y})\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\psi, \psi\} = \{\psi^\dagger, \psi^\dagger\} = 0$$

これを上のフーリエ展開に整合させると、モード演算子は

$$\{b_s(\mathbf{p}), b_{s'}^\dagger(\mathbf{q})\} = (2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad \{d_s(\mathbf{p}), d_{s'}^\dagger(\mathbf{q})\} = (2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

かつ他は 0。これが CAR (反交換関係)。

直観：各モードが「0/1占有」の量子系（パウリの排他）=2準位になり、行列で表すと先ほどの  $2 \times 2$  の  $c, c^\dagger$  がまさにそれ。

#### 5.4 「なぜボースは交換、フェルミは反交換なのか」をフーリエ視点で一言で

フーリエ展開で場は「独立モードの集合」になります。

量子化とは各モードを演算子化して、局所性（因果律）+ 正のエネルギーと両立する代数を課すことです。

- スカラー／ベクトル（整数スピン）→ CCR が局所性と整合
  - スピノール（半整数スピン）→ CAR でないと局所性や安定性が壊れる（スピン統計）
- （ここは本来「スピン統計定理」の領域ですが、フーリエ分解後の“各モード代数”として見ると非常にクリアになります。）

#### まとめ表①：フーリエ変換（基底変換）と演算子

観点	位置空間	フーリエ空間
変換	$f(x)$	$\tilde{f}(k)$
演算子	$(F f)(k) = \int dx e^{-ikx} f(x)$	逆変換 $(F^{-1} \tilde{f})(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k)$
微分	$\partial_x$	掛け算 $ik$ (対角化)
物理的意味	局所（点）表示	モード（波数）表示

#### まとめ表②：場の量子化と（反）交換関係の比較

場	典型展開（概形）	モード演算子	代数	行列表現 像
スカラー場 $\phi$	$\int (a e^{-ipx} + a^\dagger e^{ipx})$	$a, a^\dagger$	$CCR : [a, a^\dagger] = \delta$	無限次元 振動子)

場	典型展開（概形）	モード演算子	代数	行列表現像
ベクトル場 $A_\mu$	$\sum_\lambda \int (a_\lambda \epsilon e^{-ipx} + a_\lambda^\dagger \epsilon^* e^{ipx})$	$a_\lambda, a_\lambda^\dagger$	$CCR : [a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta$	無限次元 極が振動
スピノール場 $\psi$	$\sum_s \int (b_s u e^{-ipx} + d_s^\dagger v e^{ipx})$	$b, b^\dagger, d, d^\dagger$	$CAR : \{b, b^\dagger\} = \delta$	$2 \times 2$ で (单一モード)

もし次に進めるなら、英治さんが好きそうな形で：

- 「フーリエ変換 = “運動量演算子の固有基底への変換”」（ $|x\rangle$  と  $|p\rangle$  の関係）
- 「場の正準量子化を“無限自由度の線形代数”として書く（場の位相空間・シンプレクティック形式と CCR、フェルミの場合のクリフォード代数と CAR）
- さらに ゲージ場の制約（Gauss 則）が「単純な CCR をどう修正するか」

…まで、一気に美しく繋げられます。

第5の質問です。「ボース粒子」と「フェルミ粒子」の統合、つまり、演算子の「交換関係」と「反交換関係」の統合を「超対称性」と呼ばれます。その「超対称性」を考えるために、「スカラー」「ベクトル」「スピノール」とともに、「グラスマン数」があると理解しています。それら4つの「数（場）」を説明し、数学用語をもじて段階的に説明し定義してください。その比較表を作成してください。

以下では、英治さんの1~5の質問を「数学：フーリエ変換 = モード分解の演算子」→「物理：場の量子化 = 各モードを量子振動子（ボース）／2状態系（フェルミ）にする」...という一本の線で整理します。式はできるだけ フーリエ変換（Fourier 展開）を中心に置き、交換関係／反交換関係は行列（有限次元・無限次元の代表例）で見える形にします。

### 1) スカラー・ベクトル・スピノール（まず“何がどう変換するか”）

#### スカラー（scalar）

- 回転やローレンツ変換の下で **成分が混ざらない** 量。
- 例：温度、質量密度、（相対論なら）スカラー場  $\phi(x)$ 。

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

#### ベクトル（vector）

- 座標変換の下で **成分が線形に混ざる**（表現としての基本例）。
- 例：3次元ベクトル  $\vec{v}$ 、4元ベクトル  $A^\mu$ （電磁ポテンシャル）。

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$$

#### スピノール（spinor）

- 回転群（より正確にはその被覆群）に対して、ベクトルとは異なる表現で変換する“平方根的”対象。
- 例：デイラックスピノール  $\psi(x)$ （4成分）、ワイルスピノール（2成分）。

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x), \quad S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}\right)$$

### まとめ表（1）

種類	記号例	変換のされ方（表現）	典型例
スカラー	$\phi$	成分が混ざらない	スカラー場、温度

種類	記号例	変換のされ方（表現）	典型例
ベクトル	$A^\mu, \vec{V}$	$\Lambda$ で線形変換	電磁4元ポテンシャル
スピンор	$\psi$	$S(\Lambda)$ （スピンор表現）	デイラック場

## 2) フーリエ級数・フーリエ変換と「演算子」としての見方（質問1-2）

フーリエ級数（周期  $L$ ）

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{ik_n x}, \quad k_n = \frac{2\pi n}{L}$$

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x) e^{-ik_n x}$$

フーリエ変換 ( $\mathbb{R}^d$ )

$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^d} d^d x e^{-ik \cdot x} f(x), \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik \cdot x} \tilde{f}(k)$$

「演算子」としてのフーリエ変換

フーリエ変換  $F$  を線形演算子として

$$(F f)(k) = \tilde{f}(k)$$

と書く。

重要な交換（共役変換）関係：微分と掛け算が入れ替わる

$$F(\partial_j f)(k) = ik_j \tilde{f}(k), \quad F(x_j f)(k) = i\partial_{k_j} \tilde{f}(k)$$

これは量子論でいう「位置  $x$  と運動量  $k$  ( $p = \hbar k$ )」の双対性を、そのまま表しています。

## 3) 「交換関係／反交換関係」とは何か（数学的定義 → 行列）

定義（演算子代数の基本）

- 交換子（commutator）

$$[A, B] = AB - BA$$

- 反交換子（anticommutator）

$$\{A, B\} = AB + BA$$

## 行列で“見える”最短例

### (i) 交換子の例：パウリ行列

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

### (ii) 反交換子の例：同じくパウリ行列

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbf{1}$$

この「反交換で単位行列が出る」構造が、フェルミの“2状態性”（占有数0か1）と強く結びつきます。

## まとめ表 (2)

概念	記号	中身	典型的に現れる場所
交換子	$[A, B]$	$AB - BA$	ボース演算子、対称性代数
反交換子	$\{A, B\}$	$AB + BA$	フェルミ演算子、クリフォード代数

## 4) スカラー場・ベクトル場・スピノール場の定義と、フーリエ変換（モード分解）

### (質問2)

ここが「数学のフーリエ変換」と「物理の場の量子化」が直結する点です。

### (A) スカラー場（例：実スカラー）

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}), \quad p^0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

これは “\*\*” 場  $\phi(x)$  をフーリエ基底  $e^{\pm ip \cdot x}$  に展開したもの “\*\*” で、係数が 数ではなく 演算子  $a, a^\dagger$  になっています。

### (B) ベクトル場（例：電磁場の量子化のイメージ）

（ゲージの扱いは一段難しいので“モード分解の形”に焦点化）

$$A_\mu(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (\epsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \epsilon_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger e^{ip \cdot x})$$

ベクトルであることは、偏極ベクトル  $\epsilon_\mu$ （成分）として現れます。

### (C) スピノール場（例：ディラック場）

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (b_{\mathbf{p}, s} u(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x} + d_{\mathbf{p}, s}^\dagger v(\mathbf{p}, s) e^{ip \cdot x})$$

スピノールであることは、係数のところにスピノール  $U, V$  が乗る（成分が多い）ことで現れます。

まとめ表 (3)

場	フーリエ（モード）展開の係数	"成分"はどこに入る？
スカラー場 $\phi$	$a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger$	係数はスカラー
ベクトル場 $A_\mu$	$a_{\mathbf{p},\lambda}$	$\epsilon_\mu(\lambda)$ がベクトル成分
スピノール場 $\psi$	$b_{\mathbf{p},s}, d_{\mathbf{p},s}$	$U(\mathbf{p}, s), V(\mathbf{p}, s)$ がスピノール成分

5) ボース場は交換関係、フェルミ場は反交換関係（フーリエ式で段階的）（質問3-4）

核心：フーリエ係数（モード）を量子化する

(A) ボース（スカラー・ベクトルなど）

各モードは量子調和振動子：

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$$

この交換関係を入れて、 $\phi(x)$  と共に運動量  $\pi(x) = \partial_0 \phi(x)$  が

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

を満たすように正規化（係数の  $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$  など）を決めます。

(B) フェルミ（スピノール）

各モードは“占有数が 0/1”的系：

$$\{b_{\mathbf{p},s}, b_{\mathbf{q},r}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{sr}, \quad \{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0$$

同様に  $\psi$  と共に  $\psi^\dagger$  が

$$\{\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \mathbf{y})\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

を満たすように正規化されます（ $\alpha, \beta$  はスピノール成分）。

行列表示で“なぜフェルミは反交換か”を見る（最重要の直観）

フェルミ1モード（占有 0/1）の行列

基底  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  で

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

すると

$$\{b, b^\dagger\} = bb^\dagger + b^\dagger b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}, \quad b^2 = (b^\dagger)^2 = 0$$

“二回作るとゼロ”=同じ状態に2個入らない（パウリ原理）を行列で見ています。

#### ボース1モード（無限次元）の行列（概念）

基底  $|n\rangle$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) に対し

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

で

$$[a, a^\dagger] = \mathbf{1}$$

占有数が無限に増やせる構造です（行列は無限次元）。

まとめ表（4）：フーリエ係数（モード）→ 粒子統計

種類	典型の場	モード係数	代数	占有数
ボース	スカラー場・ベクトル場	$a, a^\dagger$	交換 $[a, a^\dagger] = 1$	$0, 1, 2, \dots$
フェルミ	スピノール場	$b, b^\dagger$	反交換 $\{b, b^\dagger\} = 1$	$0, 1$

#### 6) 「交換」と「反交換」を統合する言語：超対称性とグラスマン数（質問5）

##### (i) グラスマン数（Grassmann number, $\theta$ ）

- 反交換する数（“数”なのにフェルミ的）：

$$\theta_1 \theta_2 = -\theta_2 \theta_1$$

特に

$$\theta^2 = 0$$

（同じものを2回掛けるとゼロ）

これは“フェルミ演算子の代数”を、解析（関数）として扱えるようにする道具です。

（例：経路積分でフェルミ場を積分するにはグラスマン変数が必要。）

##### (ii) 超対称性（SUSY）の最小の骨格： $Z_2$ で“次数”を持つ代数

- ボース的（偶）とフェルミ的（奇）を同じ代数に入れる。
- そのときの基本演算は 次数付き交換子（graded commutator）：

$$[A, B]_{\pm} := AB - (-1)^{|A| + |B|} BA$$

$|A| = 0$  (偶: ボース),  $|A| = 1$  (奇: フェルミ)。

- 偶×偶なら普通の交換子、奇×奇なら反交換子が自然にできます。

### (iii) SUSY 代数の象徴式（最重要だけ）

超電荷  $Q$  はフェルミ的（奇）で、

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\beta} P_\mu$$

右辺に運動量  $P_\mu$  (時空の並進: ボース的) が出てきます。

“フェルミ的生成元の反交換が、ボース的生成元（並進）を生む”のが統合の核心です。

### (iv) スカラー・ベクトル・スピノール・グラスマンを一緒に見る

- スカラー場  $\phi(x)$ ：ボース（偶）
- ベクトル場  $A_\mu(x)$ ：ボース（偶）
- スピノール場  $\psi(x)$ ：フェルミ（奇）
- グラスマン数  $\theta$ ：フェルミ的な“座標”（奇）

SUSY では  $(x^\mu, \theta)$  のような 拡張空間（超空間）を考え、

$$\Phi(x, \theta) = \phi(x) + \bar{\theta}\psi(x) + \dots$$

のように 1つの“超場”の中にボース成分とフェルミ成分を同居させます。ここで  $\theta$  の反交換性が効いて、成分展開が有限で止まります ( $\theta^2 = 0$  など)。

### まとめ表（5）：4つの「対象」の比較

対象	記号例	代数的性質	物理での役割
スカラー（場）	$\phi(x)$	偶（ボース）／交換的	スピン0粒子の場
ベクトル（場）	$A_\mu(x)$	偶（ボース）／交換的	ゲージ粒子の場（例：光子）
スピノール（場）	$\psi(x)$	奇（フェルミ）／反交換的	物質粒子の場（例：電子）
グラスマン数	$\theta$	反交換： $\theta_1\theta_2 = -\theta_2\theta_1$	フェルミ自由度の“座標”・経路積分・超空間

いちばん短い「全体の結論」（英治さんの意図に沿って）

- \*\*フーリエ変換（級数）\*\*は、場を **独立なモード** (**p**) に分解する数学的演算子。
- 場の量子化は、そのモード係数を **演算子**に昇格させ、
  - ボース場：交換関係（調和振動子）
  - フェルミ場：反交換関係（2状態系）
 を課すこと。
- 超対称性は、これらを **次数付き（グレーデッド）代数**で統一し、**グラスマン数**を使って“フェルミ的 方向”を幾何化する枠組み。

必要なら次は、英治さんがよく求めるスタイルで：

- (a) 1次元の有限体積（フーリエ級数）で  $\delta$  の代わりに Kronecker  $\delta_{nm}$  を使い、
- (b)  $\phi(X)$  と  $\pi(X)$  の交換子から  $[a_n, a_m^\dagger] = \delta_{nm}$  を実際に導出し、
- (c) 同様に  $\psi$  から  $\{b_n, b_m^\dagger\} = \delta_{nm}$  を導く、  
という“計算で手触りが出る”形にもできます。

今日はここまでにしておきます。ありがとうございました。英治