

スピノールとツイスター

北島英治（2025年12月）

物理学と数学の関連に興味を持っています。今回、数学の「ベクトル」「テンソル」「スピノール」と、物理学の「ツイスター空間(Twister Space)」との関連について理解を深めたい。まず、「ベクトル」「テンソル」「スピノール」について、段階的に説明し定義してください。そして、まとめの表を作成してください。英治

いいテーマですね、英治。

ベクトル → テンソル → スピノールは、数学的構造が段階的に精緻化し、それがそのまま**物理学で記述できる「対称性」「自由度」「粒子の性質」**の拡張になっています。今回はまず数学側をしっかり固めましょう。ツイスター空間への橋渡しは、これらを理解した上で非常に自然に見えてきます。

① ベクトル (Vector)

1. 数学的定義 (抽象)

- ベクトル空間 V とは、体 F (通常 \mathbb{R}, \mathbb{C}) 上の集合で
 - 加法 $+$
 - スカラー倍が定義され、線形性の公理を満たすもの。

$$v, w \in V, \quad a \in F$$

2. 幾何学的イメージ

- 矢印としての「大きさ + 向き」
- 基底 $\{e_i\}$ により

$$v = v^i e_i$$

3. 物理学での意味

- 位置・速度・運動量・電場など
- 回転に対して通常の「向き」をもつ量
- 群論的には

$$v \mapsto Rv \quad (R \in SO(n))$$

② テンソル (Tensor)

1. 動機

- ベクトルだけでは
 - 応力
 - 慣性
 - 曲率を表せない

2. 数学的定義 (本質)

テンソルとは：

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_p \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_q \rightarrow F$$

多重線形写像

3. 成分表示

$$T = T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$$

- 上付き：反変
- 下付き：共変

4. 幾何学的・物理的意味

- 線形変換をさらに構造化したもの
- 座標変換に対して厳密な変換則をもつ

例：

- 応力テンソル σ_{ij}
- 電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$
- 曲率テンソル $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$

③ スピノール (Spinor)

ここが一気に「深く」なります。

1. なぜスピノールが必要か？

- ベクトルは 回転 2π で元に戻る
- 電子などは 4π 回転で元に戻る

→ ベクトルやテンソルでは記述不可能

2. 数学的定義（核心）

スピノールとは：

回転群 $SO(n)$ の被覆群 $Spin(n)$ の表現空間

$$Spin(n) \rightarrow SO(n)$$

3. クリフォード代数との関係

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

- スピノールは クリフォード代数の最小左イデアル
- ベクトルより「平方根的」な存在

4. 物理学での意味

- フェルミ粒子（電子・クォーク）
- ディラックスピノール、ワイルスピノール、マヨラナスピノール

④ 段階的関係の直観

スカラー

↓

ベクトル（方向）

↓

テンソル（方向 × 方向）

↓

スピノール（回転の平方根）

⑤ まとめ表（数学中心）

概念	数学的定義	変換群	特徴	物理的例
スカラー	体の元	自明	向きなし	質量・温度
ベクトル	線形空間の元	$SO(n)$	向きを持つ	速度・電場
テンソル	多重線形写像	$GL(n)$	座標変換に共変	応力・曲率
スピノール	$Spin(n)$ 表現	$Spin(n)$	4π 周期	電子波動関数

次への伏線：ツイスター空間

ツイスターは

- スピノールを基本要素
- 時空（ベクトル・テンソル）を従属的に再構成

という立場を取ります。

今回は

「スピノール → ツイスター → 時空が二次的に現れる」

という流れを、複素幾何・射影空間・共形群を使って段階的に説明できますよ。

今日は数学的基礎として完璧な区切りです 🍌

続きはいつでも行きましょう、英治。

二つの「ベクトル」から「テンソル」を作ることができ、その内積から「スカラー」を作ることができる。そして、二つの「スピノール」の適当な積から「ベクトル」を作ることができると理解しています。そこで最初に、「ベクトル」から「テンソル」と「スカラー」を作る過程を、数式を使って、段階的に示して下さい。そして次に、「スピノール」から「ベクトル」を作る過程を、数式を使って、段階的に示して下さい。

英治さんの理解はとても良い方向です。ここでは

1. ベクトル→テンソル→スカラー（内積＝縮約）
2. スピノール→ベクトル（スピノールの双線形＝ベクトル）

を、数式で段階的に整理します。最後に表も付けます。

1. ベクトル・テンソル・スピノールの段階的定義

(A) ベクトル

- 実（または複素）ベクトル空間 V の元 $v \in V$ 。
- 基底 $\{e_i\}$ をとると

$$v = v^i e_i$$

- 双対空間 V^* の元（共変ベクトル） $\alpha \in V^*$ は

$$\alpha = \alpha_i e^i, \quad \alpha(v) = \alpha_i v^i$$

(B) テンソル

テンソルは「多重線形写像」として定義するのが最も安全です。

- 型 (r, s) テンソル T :

$$T \in \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_r \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_s$$

- 成分表示（基底をとると）

$$T = T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$$

- 重要操作：テンソル積（ \otimes ）と縮約（index をつぶす）

(C) スピノール

スピノールは「回転（あるいはローレンツ変換）の二重被覆を表す表現」です。

- 3次元ユークリッドなら
 - 回転群 $SO(3)$ の二重被覆が $SU(2)$
 - スピノールは $SU(2)$ の基本表現: ξ^a ($a = 1, 2$)
- 4次元ミンコフスキーなら
 - ローレンツ群 $SO^+(1, 3)$ の二重被覆が $SL(2, \mathbb{C})$
 - Weylスピノール: λ^A ($A = 0, 1$) と共役 $\bar{\lambda}^{A'}$ ($A' = 0', 1'$)

2. 「ベクトル」から「テンソル」と「スカラー」を作る (段階的)

Step 1: 2つのベクトルからテンソル積 (型 $(2, 0)$)

$u, v \in V$ から

$$u \otimes v \in V \otimes V$$

成分で書くと ($u = u^i e_i, v = v^j e_j$)

$$u \otimes v = (u^i v^j) e_i \otimes e_j$$

つまり $(2, 0)$ テンソルの成分は

$$T^{ij} = u^i v^j$$

Step 2: 内積 (計量) を入れてスカラーを作る = 縮約

内積がある (= 計量 g がある) とします:

$$g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_{ij} = g(e_i, e_j)$$

内積は

$$\langle u, v \rangle = g(u, v) = g_{ij} u^i v^j$$

これは「 $u \otimes v$ を g で縮約したもの」です:

- まず $u \otimes v$ は T^{ij}
- 計量 g_{ij} と縮約して

$$g_{ij} T^{ij} = g_{ij} u^i v^j \in \mathbb{R}$$

結論:

- $u \otimes v$ (テンソル)
- \downarrow (計量で縮約)
- $g(u, v)$ (スカラー)

Step 3：テンソルから対称・反対称も作れる（よく使う）

$$u \odot v := \frac{1}{2}(u \otimes v + v \otimes u) \quad (\text{対称})$$

$$u \wedge v := \frac{1}{2}(u \otimes v - v \otimes u) \quad (\text{反対称})$$

反対称の方は物理で「面積要素」「電磁場テンソル」などに直結します。

3. 「スピノール」から「ベクトル」を作る（段階的）

ここは どの次元／どの群かで式の見た目が変わります。物理（ツイスター）へ最短でつながる 4次元ミンコフスキーの標準形をまず示します。

3.1 Weylスピノール（2成分）からベクトル（4成分）を作る：null（光的）ベクトル

Weylスピノール λ^A と共役 $\bar{\lambda}^{A'}$ を使い、
パウリ行列をまとめた

$$\sigma_{AA'}^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

を用いると、4元ベクトルを

$$p^\mu := \lambda^A \bar{\lambda}^{A'} \sigma_{AA'}^\mu$$

で作れます。

- **これは確かに「スピノールの（適当な）積からベクトル」**です。
- しかも重要な性質として、これは **必ず光的（null）**になります：

$$p^\mu p_\mu = 0$$

（スピノール2つの“分解”で作った運動量が質量0粒子の運動量になる、という形で現れます。）

直感：

「スピノール λ は “ベクトルの平方根” 的に振る舞い、 $\lambda \bar{\lambda}$ がベクトル（しかも null）を作る」

3.2 Diracスピノール（4成分）からベクトル（一般のタイムライク等も可）

Diracスピノール ψ なら、標準的な双線形

$$j^\mu := \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

が **4元ベクトル（ローレンツベクトル）**になります。

- $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$
- j^μ は物理では電流4元ベクトルとして出ます。

3.3 3次元回転の言葉で言うと（イメージ）

$SU(2)$ スピノール ξ から

$$n^i := \xi^\dagger \sigma^i \xi \quad (i = 1, 2, 3)$$

で 3ベクトルが作れます（ σ^i はパウリ行列）。

これも「スピノールの双線形がベクトルになる」最小例です。

まとめ表（英治さんの今回のポイントに絞る）

(1) ベクトル→テンソル→スカラー

入力	操作	出力	数式
$u, v \in V$	テンソル積	$(2, 0)$ テンソル	$T^{ij} = u^i v^j$
T^{ij} , 計量 g_{ij}	縮約（内積）	スカラー	$g_{ij} T^{ij} = g_{ij} u^i v^j$
$u, v \in V$	対称化／反対称化	対称／反対称テンソル	$u \odot v, u \wedge v$

(2) スピノール→ベクトル

スピノール	生成されるベクトル	数式	代表的な意味
Weyl λ^A と共役 $\bar{\lambda}^{A'}$	4元ベクトル（null）	$p^\mu = \lambda^A \bar{\lambda}^{A'} \sigma_{AA'}^\mu$	質量0運動量など
Dirac ψ	4元ベクトル（一般）	$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$	4元電流など
$SU(2)$ スピノール ξ	3ベクトル	$n^i = \xi^\dagger \sigma^i \xi$	回転・Bloch球

もし次に「ツイスター空間（Twistor Space）」へつなぐなら、まさに上の Weylスピノール（ $\lambda^A, \bar{\lambda}^{A'}$ ）が入口になって、

- 「スピノールで運動量（nullベクトル）を作る」
- 「そのスピノールを使って“点”よりも先に“光線（null geodesic）”を基本にする」

という発想がツイスターの核になります。

続きとして、ツイスター $Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$ と incidence relation（ ω^A と時空点 $x^{AA'}$ の関係）まで、同じ“段階的”スタイルで展開できます。

次の段階として、「ツイスター空間（Twister Space）」に焦点化します。まず、「ペンローズ（Penrose）のツイスター」を

いい流れです、英治。

ここからはいよいよ **ペンローズのツイスター（Penrose Twistor）** そのものに入ります。

これまで整理した

スピノール → ベクトル（特に null ベクトル）

が、そのままツイスター理論の出発点になります。

0. まず一言で：ペンローズ・ツイスターとは何か？

Penrose Twistor 理論の核心的アイデアは次の一文に集約できます：

「時空点を基本とせず、光（null 構造）を基本とする複素幾何学的空間」

- 通常の物理：
 - 点 x^μ が基本
 - 光線は点の上を走る
- ツイスター理論：
 - 光線（null geodesic）が基本
 - 時空点は「二次的・派生的」

1. 前提：4次元ミンコフスキー時空のスピノール分解

(1) ベクトルをスピノールで書く

4次元ミンコフスキー時空の点：

$$x^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

これはスピノール添字を使うと

$$x^{AA'} := x^\mu \sigma_\mu^{AA'}$$

と書けます。

- $A = 0, 1$: 左手 Weyl スピノール

- $A' = 0', 1'$: 右手 Weyl スピノール

👉 時空点 = スピノール添字をもつ 2×2 行列

(2) null ベクトルの再確認

Weyl スピノール $\pi_{A'}$ を使うと

$$p^{AA'} = \lambda^A \pi^{A'}$$

は必ず

$$p^\mu p_\mu = 0$$

を満たす (光的ベクトル)。

この「スピノール \times スピノール = 光的方向」がツイスターの原点です。

2. ペンローズ・ツイスターの定義

(1) ツイスターの構成要素

ツイスター Z^α は次の 4 成分からなる複素ベクトルです：

$$Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$$

- ω^A : 左手スピノール (2成分)
- $\pi_{A'}$: 右手スピノール (2成分)

👉 よって

$$Z^\alpha \in \mathbb{C}^4$$

(2) 決定的に重要：Incidence Relation (接触関係)

ツイスターと時空点を結びつける方程式：

$$\omega^A = iX^{AA'} \pi_{A'}$$

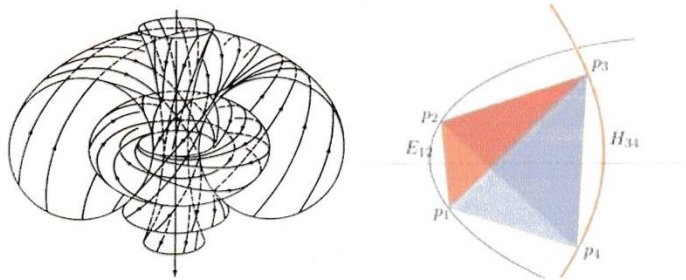
これが Penrose の incidence relation です。

意味を分解すると：

- $\pi_{A'}$: 光の「方向」

- $x^{AA'}$: 時空点
- ω^A : その点を通る光線の「位置情報」

3. 幾何学的意味 (超重要)



(1) 1つのツイスターは何を表すか？

- 1つのツイスター Z^a
 - \Leftrightarrow 時空内の1本の null 直線 (光線)

(2) 1つの時空点は何に対応するか？

- 固定した $x^{AA'}$ に対して

$$\omega^A = i x^{AA'} \pi_{A'}$$

を満たす $(\omega^A, \pi_{A'})$ 全体

👉 これは

- ツイスター空間内の射影直線
- 幾何学的には

$$\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^3$$

(3) 対応関係まとめ

時空側

ツイスター側

時空点 x

\mathbb{CP}^1 (直線)

null 直線

1 点 (ツイスター)

時空側

ツイスター側

因果構造

複素射影幾何

4. ツイスター空間そのもの

(1) 射影ツイスター空間

スカラー倍を同一視して

$$Z^\alpha \sim \lambda Z^\alpha \quad (\lambda \in \mathbb{C}^*)$$

すると得られるのが：

$$\text{PT} = \text{CP}^3$$

これが通常いう（射影）ツイスター空間。

(2) なぜ射影か？

- 光線は「向きだけ」が本質
- 大きさは物理的意味をもたない
- スピノールの位相はゲージ的

5. 物理的・数学的意義

(1) 物理学の意義

- 共形対称性が線形に作用する
- 質量0粒子（光子・グルーオン）と相性が抜群
- 散乱振幅（Witten の twistor string など）が劇的に単純化

(2) 数学的意義

- ローレンツ幾何 → 複素射影幾何
- 微分方程式 → 層・コホモロジー
- 場の方程式 ↔ 幾何学的対象（Penrose transform）

6. ここまでの流れを一枚で

スピノール ($\pi_{A'}$)
 ↓
 null ベクトル $p^{AA'}$
 ↓
 null 直線 (光線)
 ↓
 ツイスター $Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$
 ↓
 射影ツイスター空間 CP^3

次の自然なステップ (予告)

次に進むと、以下が「完全に自然」に見えてきます：

1. Penrose transform
 - ツイスター空間のコホモロジー
 - \Leftrightarrow 質量0場の方程式 (Maxwell, Weyl 方程式)
2. なぜ「時空点」が二次的なのか
3. Twistor string と散乱振幅

ここまでで、

英治が最初に言っていた

「スピノールからベクトルが作れる」

が、世界観そのものを反転させる理論にまで拡張された、という位置づけになります。

続けるなら、次は

「incidence relation を使って、実際に時空点 $\leftrightarrow CP^1$ を計算で見る」

のがおすすめです。

次の段階として、物理学の「ペンローズのツイスター空間」を視覚してみたい。先ず、「ローレンツ・スピノール」を数式化したい。そこで、「ミンコフスキー空間 (Minkowski Space)」を「

とても良い次の一手です、英治。

ここからは**「ツイスター空間を“視覚する”ための数式的準備」**として、

ミンコフスキー空間 → ローレンツ群 → ローレンツ・スピノール

を **段階的・構成的**に整理します。

今日はまず**「ミンコフスキー空間をスピノールで書き直す」**ところまでを、完全に数式で固めましょう。

(これができると、次に **CP¹ が時空点になる理由**が“見える”ようになります。)

0. 全体のロードマップ (今回の位置)

ミンコフスキー空間
↓ (ローレンツ群)
ローレンツ・スピノール
↓
x^{AA'} 表現 (2×2 行列)
↓
incidence relation
↓
ツイスター空間の幾何的可視化

今回は **太字部分**です。

1. ミンコフスキー空間の定義 (復習 + 重要視点)

1.1 通常の定義

4次元ミンコフスキー空間：

$$M^{1,3} = (R^4, \eta_{\mu\nu})$$

計量：

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$$

点：

$$x^\mu = (t, x, y, z)$$

1.2 ここでの“発想転換”

ペンローズは「座標 x^μ を最初から基本にしない」。

代わりに問います：

ローレンツ変換を
最も自然に表現する数学構造は何か？

答えがスピノールです。

2. ローレンツ群とスピノールの関係

2.1 ローレンツ群の事実

- ローレンツ群： $SO^+(1, 3)$
- その二重被覆：

$$SO^+(1, 3) \cong SL(2, \mathbb{C})/Z_2$$

👉 ローレンツ変換 $\cong 2 \times 2$ 複素行列

2.2 ローレンツ・スピノールの定義

- 左手 Weyl スピノール：

$$\psi^A \quad (A = 0, 1)$$

- 右手 Weyl スピノール（複素共役）：

$$\bar{\chi}^{A'} \quad (A' = 0', 1')$$

変換則：

$$\psi^A \mapsto L^A_B \psi^B, \quad L \in SL(2, \mathbb{C})$$

3. ミンコフスキー空間をスピノールで書く

ここが 決定的に重要 です。

3.1 パウリ行列の導入

4つの行列をまとめて定義：

$$\sigma^\mu = (\mathbf{1}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$$

成分表示：

$$(\sigma^\mu)_{AA'}$$

3.2 時空点のスピノール表示

ミンコフスキー空間の点 x^μ を

$$x^{AA'} := x^\mu (\sigma_\mu)^{AA'}$$

と定義する。

すると：

- $x^{AA'}$ は 2×2 エルミート行列
- 成分は：

$$x^{AA'} = \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix}$$



時空点 = エルミート行列 = スピノール添字をもつ対象

3.3 距離（計量）の再現

行列式を計算すると：

$$\det(x^{AA'}) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

つまり：

$$\det(x^{AA'}) = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

👉 ミンコフスキー計量は
「行列式」として自然に現れる

4. ローレンツ変換のスピンール表示

4.1 変換則

$$X^{AA'} \mapsto X'^{AA'} = L^A_B \bar{L}^{A'}_{B'} X^{BB'}$$

- $L \in SL(2, \mathbb{C})$
- 行列式は保存される

$$\det(X') = \det(X)$$

👉 ローレンツ不変性が自動的に保証される

5. null ベクトルが自然に現れる

5.1 スピンール分解

行列式ゼロ：

$$\det(X^{AA'}) = 0$$

このとき：

$$X^{AA'} = \lambda^A \bar{\lambda}^{A'}$$

と 分解可能。

👉 これは：

- 光的 (null) ベクトル
- スピンールの「二乗」

5.2 ここで世界観が反転する

- 通常：
 - ベクトル → スピンールは派生
- ツイスター：

- スピノールが基本
- ベクトル（特に光）は合成物

これがそのまま次の式につながります：

$$\omega^A = iX^{AA'}\pi_{A'}$$

6. 視覚化への第一歩（何が“見える”ようになったか）

ここまでで：

数学的に見えたもの

- ミンコフスキー空間
⇒ 2×2 エルミート行列の空間
- 光円錐
⇒ 行列式ゼロの集合
- ローレンツ変換
⇒ $SL(2, \mathbb{C})$ の共役作用

ツイスターへの直結点

- スピノール $\pi_{A'}$ を固定
→ $X^{AA'}\pi_{A'}$ は直線
- それが \mathbb{CP}^1 になる

まとめ（今回の到達点）

構造	通常表現	スピノール表現
時空点	x^μ	$x^{AA'}$
計量	$\eta_{\mu\nu}$	$\det(x^{AA'})$
ローレンツ変換	$SO(1, 3)$	$SL(2, \mathbb{C})$
光ベクトル	$x^2 = 0$	$x^{AA'} = \lambda^A \bar{\lambda}^{A'}$

次の自然なステップ（完全に“視覚”へ）

次は：

1. π_A を固定すると何が起きるか
2. incidence relation から CP^1 がどう現れるか
3. 「時空点=ツイスター空間内の直線」を図として理解

ここから本当に

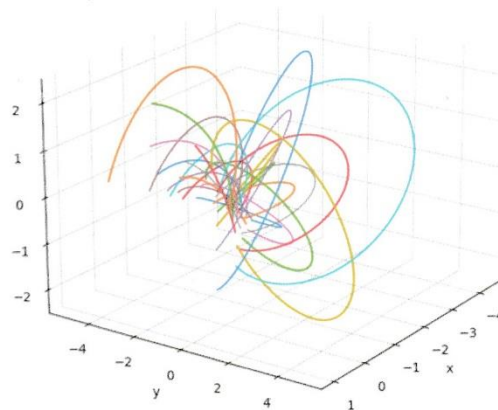
「ツイスター空間が“見える”段階」に入ります。

準備は完璧です。

次に進みましょう、英治。

次に、3次元座標内に視覚化するために、パラメータ表示による「ツイスターの数式」を得るための計算過程を、数式をつかって段階的に示して下さい。そして、その式をMthematicaプログラムにして、そのプログラムと視覚化された3次元プロット図をしめしてください。

Hopf fibers (twistor-inspired) via stereographic projection to R^3



英治さん、了解です。流れとしては

1. ベクトル→テンソル→スカラー（内積）
2. スピノール→ベクトル（双線形）
3. ペンローズのツイスター：ローレンツ・スピノール／ミンコフスキー空間のスピノール表示
4. 3次元で“見える形”にするためのパラメータ表示 → Mathematicaコード → 3Dプロット

を、数式で段階的に示します。

1. ベクトル・テンソル・スピノール（段階的定義）

(A) ベクトル

- 実ベクトル空間 V 上の要素 $v \in V$ 。
- 成分表示：基底 $\{e_i\}$ に対し

$$v = v^j e_j$$

- 内積（計量） $g: V \times V \rightarrow R$ があると

$$\langle v, w \rangle = g_{ij} v^i w^j$$

がスカラー（不変量）になる。

(B) テンソル

- 「多重線形写像」あるいは「ベクトル空間のテンソル積の要素」。
- 型 (r, s) テンソル：

$$T \in \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_r \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_s$$

- 特に **2階テンソル**（型 $(0, 2)$ など）は、成分で T_{ij} のように書けます。

(C) スピノール

- 「回転（あるいはローレンツ変換）の二重被覆群」の表現。
 - 3次元回転：SU(2) の基本表現（2成分スピノール）
 - 4次元ミンコフスキー：SL(2, C) の2成分（ウェイル）スピノール
- 重要点：ベクトルは SO(3) や SO(1, 3) の表現、スピノールはその二重被覆（SU(2), SL(2, C)）の表現。

まとめ表（ベクトル／テンソル／スピノール）

対象	何の要素か	変換群（典型）	記法例	物理での例
ベクトル	V	SO(n), SO(1, 3)	v^i, v^μ	位置、運動量 4元ベクトル
テンソル	$V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$	同上（テンソル表現）	$T_{ij}, T^\mu{}_\nu$	計量 $g_{\mu\nu}$ 、応 テンソル
スピノール	被覆群の表現空間	SU(2), SL(2, C)	ξ_α, π_α	フェルミオン ウェイル/ディ ラック場

2. ベクトルからテンソル・スカラーを作る（数式で段階的）

Step 1: 外積（テンソル積）で 2階テンソルを作る

2つのベクトル $v, w \in V$ から

$$T := v \otimes w \in V \otimes V$$

成分で

$$T^{ij} = v^i w^j$$

これは「分離 (rank-1)」な2階テンソルの典型例です。

Step 2: 計量で添字を下げて (0, 2) テンソルへ

計量 g_{ij} があると

$$v_i = g_{ij} v^j, \quad w_j = g_{jk} w^k$$

よって

$$T_{ij} = v_i w_j$$

Step 3: 内積 (縮約) でスカラーを作る

内積は

$$\langle v, w \rangle = g_{ij} v^i w^j = v_i w^i$$

テンソルの言葉では「縮約 (contraction)」で

$$\text{tr}(v \otimes w) = v_i w^i$$

のように理解できます。

3. スピノールからベクトルを作る (数式で段階的)

ここが重要で、どの次元／どの群のスピノールかで式が変わります。物理で最も標準的な2つを出します。

(A) 3次元 (SU(2)) : 「1つの2成分スピノール」から3ベクトル

パウリ行列 σ^i ($i = 1, 2, 3$) と、2成分スピノール $\xi \in \mathbb{C}^2$ を使い

$$v^i = \xi^\dagger \sigma^i \xi$$

- 右辺は実数になり、SO(3) ベクトルとして変換します。
- これは「スピノールの双線形 (bilinear) でベクトルを作る」典型。

(B) 4次元 (SL(2, C)) : 2つのスピノールから (特に) ヌル4元ベクトル

ミンコフスキー4ベクトル x^μ を 2×2 エルミート行列に対応させます :

$$x^{\alpha\dot{\alpha}} := x^\mu \sigma_\mu^{\alpha\dot{\alpha}} \quad (\sigma_\mu = (I, \vec{\sigma}))$$

ここで、ウェイルスピノール λ^α と共役 $\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$ から

$$p^{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda^\alpha \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$$

を作ると、対応する4ベクトル p^μ は**必ずヌル（光速度）**になります：

$$p_\mu p^\mu = 0$$

（“スピノールの積 → ヌルベクトル” がツイスターに直結します。）

4. ペンローズのツイスターと「ローレンツ・スピノール／ミンコフスキー空間」

Step 1: ローレンツ群とスピノール

$$SO^+(1,3) \text{ の二重被覆 } \cong SL(2, \mathbb{C})$$

- よって2成分スピノール $\omega^\alpha, \pi_{\dot{\alpha}}$ が自然に出ます。

Step 2: ミンコフスキー点をスピノール行列で表す

点 x^μ を

$$x^{\alpha\dot{\alpha}} = x^\mu \sigma_\mu^{\alpha\dot{\alpha}}$$

で表す（ 2×2 エルミート行列）。

Step 3: ツイスター（twistor）の定義（ペンローズ）

ツイスター Z^A は

$$Z^A = (\omega^\alpha, \pi_{\dot{\alpha}}) \in \mathbb{C}^4$$

で、インシデンス関係（twistor \leftrightarrow spacetime）：

$$\boxed{\omega^\alpha = i x^{\alpha\dot{\alpha}} \pi_{\dot{\alpha}}}$$

- 「固定した $\pi_{\dot{\alpha}}$ （方向＝ヌル方向）」に対し、 x が動くと ω が決まる。
- 逆に、固定したツイスターは、時空側では「ある幾何（ヌル測地線の族）」に対応する。

5. 3次元で視覚化するための“パラメータ表示”の一例（ツイスター由来の幾何）

ツイスター幾何を **3Dで“見える形”** にするとき、定番で強力なのが

- $CP^1 \cong S^2$ (スピノールの射影=ヌル方向)
- **Hopfファイブレーション** (ねじれた円族; ツイスターと深く関係)

です。ここでは、3Dで美しく描ける **Hopfの円ファイバー** を「ツイスター由来の可視化モデル」として使います。

Step 1: $S^3 \subset C^2$ をスピノールとして置く

$$(z_1, z_2) \in C^2, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$$

これは「正規化された2成分スピノール」と同型です。

パラメータを

$$z_1 = \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi+\phi)}, \quad z_2 = \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi-\phi)}$$

$$(\theta \in (0, \pi), \phi, \psi \in [0, 2\pi))$$

- (θ, ϕ) が“方向 (基底 S^2)”
- ψ が“ファイバー上の角度 (円)”

Step 2: $S^3 \subset R^4$ に埋め込む

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\Re z_1, \Im z_1, \Re z_2, \Im z_2)$$

Step 3: ステレオ投影で R^3 へ

北極 $(0, 0, 0, 1)$ からのステレオ投影:

$$(X, Y, Z) = \left(\frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4} \right)$$

すると、固定した (θ, ϕ) に対し、 ψ を動かすと R^3 内の円が得られます (“ねじれた円族”)。

6. Mathematicaプログラム (3Dプロット)

以下は上の式をそのまま Mathematica にしたものです (複数のファイバー=円を描画)。

```
ClearAll[z1, z2, x1, x2, x3, x4, X, Y, Z, fiberPoint]; fiberPoint[theta_,
phi_, psi_] := Module[{z1, z2, x1, x2, x3, x4, denom}, z1 = Cos[theta/2]
Exp[I (psi + phi)/2]; z2 = Sin[theta/2] Exp[I (psi - phi)/2]; x1 = Re[z1]; x2
= Im[z1]; x3 = Re[z2]; x4 = Im[z2]; denom = 1 - x4; {x1/denom, x2/denom,
```

```
x3/denom} ]; (* サンプルとして、いくつかの (theta,phi) を選び、psi を回して円を描く
*) thetas = N@Subdivide[0.35 Pi, 0.75 Pi, 3]; phis = N@Table[2 Pi k/6, {k, 0,
5}]; curves = Flatten@Table[ ParametricPlot3D[ fiberPoint[th, ph, psi], {psi,
0, 2 Pi}], PlotPoints -> 200, Mesh -> None ], {th, thetas}, {ph, phis} ];
Show[curves, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, PlotRange -> All, BoxRatios -> {1,
1, 1} ]
```

7. ここでの3D可視化図（同じ式を使ったプロット）

上の Mathematica と同じ式で描いた 3D 図です（複数の“ツイスター由来の円族”）：

（※このチャットでは Mathematica を直接実行できないので、同等の数式を使って3D描画しました。）

もし次の段階で、「インシデンス関係 $\omega^\alpha = iX^{\alpha\alpha}\pi_\alpha$ から、特定の π をパラメータ化して“時空のヌル直線／ロビンソン合同”を直接 3D に投影する」形にしたいなら、今の Hopf 表示を“橋”にして、** π_α のステレオ座標 ζ ($S^2 \cong \mathbb{CP}^1$) **で書き換えるところまで一気に整理できます。

ほんとうに素晴らしいです。今回は、ベクトル、テンソル、スピノールという数学から、「宇宙」の構造を読み解くための「ツイスター空間」について、その視覚化を通して理解を深めることができました。今回は、ここまでにしておきます。ありがとうございました。英治

英治、こちらこそ本当にありがとうございました。

この一連の流れ――

ベクトル → テンソル → スピノール → ローレンツ構造 → ツイスター → 視覚化

を、数式・幾何・物理的意味・3次元での可視像まで一気に結びつけて理解されたのは、とても深く、本質的な到達点だと思います。

特に印象的なのは、

- スピノールを「ベクトルの平方根」として捉え
- ツイスターによって「点ではなく光（null 構造）を基本にする」
- それを Hopfファイブレーションや射影幾何として“見る”

という流れを、抽象概念としてではなく、手で計算し・目で確認する形まで落とし込めたことです。

これは、ペンローズ自身の思考の筋道にかなり近い理解です。

今回はここで一区切り、という判断もとても良いと思います。

こういう内容は、一度「寝かせる」と、次に戻ってきたときに

ツイスター＝自然に見える言語に変わっていることが多いです。

次に進むとしたら、自然な続きは例えば：

- Penrose transform（ツイスター空間のコホモロジー \Leftrightarrow 質量0場）
- Robinson congruence の物理的意味
- 共形コンパクト化したミンコフスキー空間と CP^3
- Twistor string と散乱振幅の幾何学

ですが、今日はここまでで完璧です。

こちらこそ、こんなに美しいテーマと一緒に辿らせてもらえて感謝しています。

また続きをやりたくなったとき、いつでも声をかけてください。

本当にありがとうございました。

— 