

物理学と数学の関連に興味をもってきました。以前、「物理量」と「単位」における「自然単位系」と「原子単位系」によって、物理方程式を「無次元単位」に変換することができることを議論しました。この「無次元変換」によって変換された「方程式」は、「物理学方程式」から「数学的方程式」に変化したと考えることができるのでしょうか？ 英治

英治さん、これはとても核心を突いた問いです。

結論から言うと――

「無次元化された方程式は、条件付きで『数学的方程式として扱える』が、存在論的には依然として物理に根を持つ」

というのが、いちばん正確な答えになります。

以下、段階的に整理しますね。

## 1 無次元化とは何をしているのか（正確な意味）

自然単位系や原子単位系でやっていることは、

- 基本定数

$$c, \hbar, k_B, e, m_e \dots$$

を1と定義

- それにより
  - 単位（次元）を消去
  - すべての量を「比」や「純粋数」に書き換える

ことです。

例：

$$E = \hbar \omega \quad \rightarrow \quad E = \omega \quad (\hbar = 1)$$

ここで重要なのは：

定数を消したのではなく、「基準に吸収した」

という点です。

## 2 数学的方程式と呼べるか？（操作的な答え）

✓ はい、次の意味では「数学的方程式」です

無次元化された方程式は：

- 実数・複素数上の方程式
- 純粋に代数的・解析的操作が可能
- 微分方程式として数学的に研究できる
- 解の存在・一意性・対称性などを  
物理を忘れて議論できる

👉 この意味では

\*\*「数学の対象として完全に自立」\*\*しています。

実際、

- リー群
- 表現論
- スペクトル理論
- 関数解析

などは、物理的由来を忘れて扱われています。

3 しかし「完全に数学に変わった」のか？（存在論的な答え）

ここが一番大事なポイントです。

✗ 完全には変わっていません

なぜなら：

1. スケーリングの選択自体が物理的

- どの定数を 1 にするかは
  - 光速？
  - 電子質量？
  - 電荷？
- これは物理理論の構造を反映

2. 解の物理解釈は失われている

- 無次元解  $x = 2$  は
  - 実際には「ある基準量の2倍」
- 基準を戻せば実験値になる

3. モデルの妥当性は物理が決める

- 同じ数学的方程式でも
  - 適用領域（低エネルギー／高エネルギー）
  - 有効理論かどうか
    - これは数学では決まらない

👉 つまり：

**形式は数学、意味は物理**

という二重構造が残ります。

#### 4 視点を整理すると（とても重要）

視点	無次元化後の方程式
記号・構文	数学
解の操作	数学
構造（対称性・群）	数学
基準の選択	物理
解の意味	物理
実験との対応	物理

#### 5 いちばん洗練された言い方

英治さんの問いに対して、専門的に最も洗練された表現はこれです：

無次元化によって、物理方程式は  
 「数学的構造としての自律性」を獲得するが、  
 「物理的意味論」は保持されたままである

あるいは、より哲学的に言うなら：

無次元化は  
 「物理を数学の言語に完全に翻訳する操作」  
 だが、  
 「翻訳されたテキストが何を語っているか」は  
 依然として物理が決める

## 6 英治さんのこれまでの関心との接続（ちょっと一歩先へ）

これまで議論してきた

- 外延量／内包量
- 量の圏
- 表現論
- 自然単位系

を踏まえると、

👉 無次元化とは

「物理量の圏から、純粋数学的対象の圏への関手」

と見ることもできます。

この見方、次は

「量の圏論」「有次元量と無次元量の随伴」

まで自然につながりますよ。

もしよければ次に：

- 「無次元量是不変量なのか？」
- 「次元解析と表現論の関係」
- 「自然単位系を圏論で書く」

どれに進むか、一緒に選びましょう。

このテーマ、かなり“美しい”ところまで行けます。

第2の質問です。現在、数学のなかで、幾何学的対象の“変化（変換）”を扱う「曲面幾何学」としての「モジュライ空間」が注目されるようになりました。先ず、「モジュライ空間」について、数学用語をもい、段階的に説明し定義してください。

英治さん、2つまとめてお答えします。

### 1) 無次元化した方程式は「物理方程式 → 数学方程式」に変わったと言える？

結論から言うと、

- 式の“形”としては数学的方程式になります（無次元の数だけが出るので、純粋に解析・代数・幾何の対象として扱える）。
- ただし“何を述べているか”は依然として物理です（どの量を基準に無次元化したか、どの近似を入れたか、境界条件・初期条件、測定との対応などが物理を担う）。

つまり

\*\*「物理の意味づけを持った数学的方程式」\*\*になる、が一番正確です。

#### 何が起きているか（数学的に）

物理量の方程式を

$$F(x, t, \psi; m, h, c, e, \dots) = 0$$

として、代表スケール（単位系）を決めて

$$x = L \tilde{x}, \quad t = T \tilde{t}, \quad \psi = \Psi_0 \tilde{\psi}$$

と置換します。ここで  $\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\psi}$  は無次元。

すると方程式は

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\psi}; \Pi_1, \Pi_2, \dots) = 0$$

の形になり、 $\Pi_j$  は 無次元パラメータ（典型的には比の形）だけになります。

この操作は本質的に スケーリング作用 ( $R_{>0}$  の群作用) で次元を割り算していると思うときれいです。

#### 「数学になった」と言ってよい部分

- 方程式は 無次元変数の関数方程式／微分方程式になり、形式的には数学の対象そのもの。
- 解の存在・一意性・安定性・対称性・分岐・特異点などを 純粋数学の言語で研究できる。

それでも「物理のまま」な部分

- 無次元化は一意ではない：基準スケールの取り方で  $\Pi_j$  の形が変わる。
- $\tilde{x}, \tilde{t}$  の解を 元の単位に戻す復元写像が必要：

$$x = L \tilde{x}, \quad t = T \tilde{t}$$

- 境界条件・初期条件・観測量（何を測るか）・モデル化の仮定が **物理の意味** を決める。

なので、「**数学的方程式に“変換”した**」はOK。

ただし「**物理方程式が数学方程式に“変化”したので物理ではない**」はNG、という感じです。

## 2) モジュライ空間とは何か（段階的に：曲面幾何の“変化（変換）”を扱う枠組み）

ここからは数学用語で、なるべく階段状に定義します。

### Step 0: そもそも何をしたい？

「ある種類の幾何学的対象（例：曲面、ベクトル束、複素構造...）を**分類**したい。

ただし“同じもの”は同一視したい（座標変換・同型など）。」

この「**同型で割った分類**」を空間として持ちたい、という欲望がモジュライです。

### Step 1: 分類したい対象の“集合”を決める

例として曲面（リーマン面）を考えると、

- 対象：種数  $g$  のコンパクト・連結なリーマン面（= 複素1次元多様体）

この「対象の全体」を雑に  $X$  と書きます。

### Step 2: “同じ”の基準（同値関係）を決める

モジュライで最重要なのがここです。

- 同値：双正則同型 (biholomorphism)  
 $X \sim Y \Leftrightarrow X \rightarrow Y$  が複素構造を保つ同型

すると分類とは

$$X / \sim$$

（同値類の集合）を作ることです。ここまでは**集合論**。



### Step 3: その集合に“幾何（位相・多様体・代数多様体など）”を入れたい

ただの集合だと解析や幾何ができないので、「空間」にしたい。

ここで理想像は：

- 各点が「同値類  $[X]$ 」
- 近傍が「小さな変形（deformation）」を表す

この“空間化”したものが **モジュライ空間**です。

### Step 4: 関手としての定式化（モジュライ問題）

モジュライは本質的に「族（family）」を扱います。

基礎アイデア：

- ある空間  $S$  上で対象がパラメータ付けされて動く（ $= S$  上の族）
- 族の同型も同一視する

これを関手で書くと：

- ある圏（例：スキームの圏、複素多様体の圏）から集合の圏への関手

$$M : (\text{Base spaces})^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

- $M(S) = \text{「} S \text{ 上の対象の族の同型類」}$

これを **モジュライ関手**（moduli functor）と呼びます。

### Step 5: “表現可能性”＝モジュライ空間が存在するとは？

もしある空間  $M$  が存在して

$$M(S) \cong \text{Hom}(S, M)$$

が自然同型として成り立つなら、 $M$  はモジュライ問題を**表現**します。

このとき  $M$  を（fine）**モジュライ空間**と言います。

- “fine” は「普遍族（universal family）が  $M$  上に存在する」こととほぼ同値な感覚です。

### Step 6: しかし現実には障害が出る（自己同型の存在）

幾何対象には「自分自身の対称性（automorphism）」があり、これが邪魔します。

例：ある曲面  $X$  が非自明な自己同型群  $\text{Aut}(X)$  を持つと、  
「点」としてきれいに表現できず、軌道空間が悪くなる（特異点が出る等）。

このため現実には得られるのはしばしば：

- **粗モジュライ空間 (coarse moduli space)**  
点集合としての分類は与えるが、 $M(S) \cong \text{Hom}(S, M)$  までは保証しない。

あるいは、自己同型を正しく扱うために：

- **スタック (stack)**（特に Deligne–Mumford stack）  
「同型の情報」まで保持する高次の幾何対象。

### Step 7: 曲面幾何で有名な例（直感）

- 種数  $g$  のリーマン面のモジュライ： $M_g$
- ティヒミュラー空間  $T_g$  は「標識付き (marked)」で自己同型問題を避けた“きれいな”空間  
そこから写像類群で割って  $M_g$  を得る：

$$M_g \simeq T_g / \text{MCG}_g$$

（※ここは直感のための図式とってください）

### まとめ（短く）

- **無次元化**：方程式は形式的に「数学的」になるが、意味づけ（対応原理・復元・測定）が残るので「物理が消える」わけではない。
- **モジュライ空間**：  
「幾何対象を同型で割って分類した集合」に、変形が連続的に見えるような“空間構造”を与えたもの。  
厳密には「モジュライ関手を表現する (fine) / 分類だけする (coarse) / 自己同型まで持つ (stack)」という階層がある。

必要なら次は、英治さんの関心（物理と幾何の接続）に合わせて、

\*\*「自然単位系による無次元化」＝「量の圏でのスケールの商」\*\*みたいに圏論っぽく整理した図式、  
または \*\* $M_g$  と物理（弦理論の世界面、CFT、パス積分）\*\* の接続を段階的に繋げて説明もできます。



第3の質問です。幾何学対象の変化（変換）を扱う「モジュライ空間」は、物理学の「場の解析力学」における「スカラー場」「ベクトル場」「テンソル場」「スピノール場」と関連があるのでしょうか？まず、物理学における「場の量子力学」の無次元化された数式としての「ラグランジアン」、その解である「微分方程式」、そのまた解である「（波動）関数」と「次元」を、簡潔に説明し定義してください。そして、「モジュライ空間」との関連があれば、数学的に段階的に説明し定義してください。その最後にまとめた表の作成をしてください。

英治さん、これは幾何学（モジュライ）と場の理論（解析力学・量子場）を真正面からつなぐ、とても本質的な問いです。

結論を先に言うと――

モジュライ空間は、物理において「場そのもの」ではなく、  
「場の解・構造・結合定数・背景幾何の“変形自由度”を座標化した空間」  
として、スカラー場・ベクトル場・テンソル場・スピノール場すべてと深く結びついています。

以下、まず 物理側を最小限に整理し、その後 数学的にモジュライとの対応を段階的に示します。

## I. 物理学側：無次元化された「場の量子力学」

### 1 無次元化されたラグランジアン（場の解析力学）

#### 一般形

無次元単位系（自然単位系）では

$$\hbar = c = 1$$

とし、すべての量は無次元になります。

#### (a) スカラー場 $\phi$

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi)$$

- $\phi(x)$ : スカラー場（数値関数）
- $m$ : 無次元質量パラメータ
- $\mathcal{L}$ : 無次元ラグランジアン密度

(b) ベクトル場  $A_\mu$  (ゲージ場)

$$L_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

- $A_\mu$ : 1形式 (接ベクトル場)
- ゲージ変換:  $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \lambda$

(c) スピノール場  $\psi$

$$L_\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

- $\psi$ : スピノール場 (表現論の対象)
- $\gamma^\mu$ : クリフォード代数

(d) テンソル場 (重力場)

$$L_g = \sqrt{-g} R$$

- $g_{\mu\nu}$ : 計量テンソル
- $R$ : リッチスカラー

## 2 解としての微分方程式 (運動方程式)

変分原理:

$$\delta S = \delta \int L d^d X = 0$$

により、オイラー＝ラグランジュ方程式:

場	方程式
スカラー	$\square\phi + m^2\phi + V'(\phi) = 0$
ベクトル	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$
スピノール	$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$
重力	$G_{\mu\nu} = 0$ (真空)

### 3 解の解：波動関数・場配置

- $\phi(x), A_\mu(x), \psi(x), g_{\mu\nu}(x)$   
は場の配置 (configuration)
- 量子論では：
  - これらの空間上で経路積分

$$\int D\phi e^{iS[\phi]}$$

### 4 次元 (dimension) の意味 (無次元化後)

無次元化後の「次元」は：

種類	意味
空間次元 $d$	多様体の次元
場の次元	スケーリング次元 (共形次元)
解空間の次元	自由度の数
モジュライ次元	独立な変形パラメータの数

👉 ここで「解空間の次元」がモジュライにつながります。

## II. モジュライ空間と場の理論の対応 (数学的に)

ここからが核心です。

### Step 1 場の理論は「無限次元空間」上の力学

- 場の配置全体：

$$C = \{\phi, A_\mu, \psi, g_{\mu\nu}\}$$

- $C$  は無限次元多様体
- 作用  $S: C \rightarrow \mathbb{R}$

### Step 2 解空間 (オンシェル)

$$S = \{\text{運動方程式を満たす場}\} \subset C$$

ここで重要：

- 同じ物理を表す場は同一視  
(ゲージ変換・座標変換)

### Step 3 商をとる → モジュライ空間

$$M = S / (\text{ゲージ同値})$$

これが物理に現れるモジュライ空間です。

### Step 4 各場ごとの具体的対応

#### ● スカラー場

- 真空解  $\phi = \phi_0$
- $\phi_0$  の連続族  
→ 真空モジュライ

#### ● ベクトル場 (ゲージ場)

- 平坦接続  $F = 0$
- ゲージ同値で割る  
→ 接続のモジュライ

#### ● スピノール場

- ディラック作用素の零モード  
→ スピノール束のモジュライ

#### ● テンソル場 (重力)

- アインシュタイン計量
- 微分同相で割る  
→ 計量・複素構造のモジュライ  
(= 曲面幾何のモジュライ)

### Step 5 幾何学的解釈 (重要)

- モジュライ空間の各点  
⇔ 1つの古典解（背景）
- モジュライ上の接ベクトル  
⇔ 線形化された場（揺らぎ）
- モジュライ積分  
⇔ 物理量の和（パス積分）

### III. まとめ表（物理 ↔ モジュライ）

物理対象	数学的対象	モジュライの意味
スカラー場	関数空間	真空値・ポテンシャルの変形
ベクトル場	接続・主束	ゲージ同値な解の分類
スピノール場	スピノール束	零モード・構造の分類
テンソル場	計量多様体	幾何構造の変形
運動方程式	楕円/双曲型PDE	解空間の定義
ゲージ対称性	同値関係	商としてのモジュライ
量子論	経路積分	モジュライ上の積分

#### 一言でまとめると

場の理論とは  
「無限次元の幾何空間上の変分問題」であり、  
モジュライ空間とは  
「その解を同値で割って得られる有限次元幾何」である。

次に進むなら、とても自然なのは：

- 弦理論における世界面のモジュライ
- 共形場理論（CFT）とモジュライ
- ゲージ理論のモジュライとインスタントン
- 量の圏論 → モジュライ関手

どれも、英治さんのこれまでの議論と一本の線でつながります。  
どこを深掘りしましょうか。

今回は、ここまでにしておきます。ありがとうございました。英治

こちらこそ、ありがとうございました、英治さん。

今回の一連の問いは、**数学（幾何・モジュライ）と物理（場・無次元化・解析力学）の接点**をととても美しく掘り下げる流れでした。こちらと一緒に考えられて楽しかったです。

また続きを話したくなったら、

- モジュライ空間上の量子論
- 弦理論・CFTとの接続
- 圏論的な「場」「解」「モジュライ」の整理

など、どこからでも再開できます。

今日はここまでで大丈夫です。

どうぞゆっくり整理なさってください。

またお会いできるのを楽しみにしています。