

対称性と保存則 (I)
北島英治 (2026年4月)

物理学と数学の関連についての理解を深めたい。今回、数学の「対称性 (symmetry)」と物理学の「保存則 (conservation)」とについて、さらなる理解を深めていきたい。第1の質問です。その最初に、数学の「対称性」を集合論 (関係、写像、関数) と数学的構造 (順序、代数、位相) において、集合論と数学用語を用いて説明し定義してください。次に、数学における「空間 (Space)」について、「集合」と、その中に構造化された「空間」との違いを、集合論と数学用語で説明し定義してください。その次に、「 n 次元ユークリッド空間」「 n 次元ユニタリ空間」「無限次元関数空間 (ヒルベルト空間)」を説明し定義してください。それに加えて、「変換」について説明し定義し、その「変換」としての「ユークリッド変換群」「アフィン変換群」「射影変換群」「共形変換群」「関数変換群 (離散・連続変換群)」の説明と定義を付け加えてください。まとめとして、それら比較表を作成してください。英治

英治さん、とても本質的で深い問いです。
今回はご要望どおり、集合論 → 数学的構造 → 空間 → 変換群 → 対称性という流れで、厳密に整理していきます。

① 数学における「対称性 (symmetry)」の定義

(集合論 + 構造)

■ 1.1 集合論的定義

集合 X を考えます。

対称性とは：

● 集合の構造を保つ写像 (自己同型)

$$\varphi : X \rightarrow X$$

であり、次を満たす：

- 全単射 (bijection)
- 構造保存 (structure-preserving)

■ 1.2 関係・写像・関数による定義

● 関係 (relation)

関係 $R \subseteq X \times X$

対称性とは：

$$(x, y) \in R \Rightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in R$$

● 写像 (mapping)

$$\varphi : X \rightarrow X$$

● 構造保存条件 (重要)

(a) 順序構造

$$x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$$

(b) 代数構造 (群・環)

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

(c) 位相構造

$$\varphi^{-1}(U) \in \mathcal{T}$$

■ 1.3 結論 (対称性の本質)

対称性 = 構造を保つ自己同型写像

② 「集合」と「空間」の違い

■ 2.1 集合 (set)

$$X = \{x_1, x_2, \dots\}$$

ただの要素の集まり (構造なし)

■ 2.2 空間 (space)

集合 X に構造を付加:

$$(X, \mathcal{S})$$

例:

空間	構造
順序空間	\leq
群	\cdot
位相空間	\mathcal{T}
ベクトル空間	線形演算

■ 2.3 本質の違い

空間 = 構造付き集合

③ 空間の具体例

■ 3.1 n 次元ユークリッド空間

$$\mathbb{R}^n$$

構造：

- 内積：

$$\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$$

- 距離：

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

■ 3.2 n 次元ユニタリ空間（複素）

$$\mathbb{C}^n$$

内積：

$$\langle x, y \rangle = \sum x_i \bar{y}_i$$

👉 複素共役が重要

■ 3.3 ヒルベルト空間（無限次元）

$$\mathcal{H}$$

例：

$$L^2(\mathbb{R})$$

条件：

- 完備性
- 内積空間

④ 「変換（transformation）」の定義

■ 4.1 一般定義

$$T: X \rightarrow X$$

■ 4.2 群としての変換

変換の集合：

$$G = \{T\}$$

が満たす：

- 合成閉性
- 単位元
- 逆元

$$\Rightarrow G \text{ は群}$$

⑤ 各種変換群の定義

■ 5.1 ユークリッド変換群

$$E(n)$$

$$x \mapsto Ax + b$$

- $A \in O(n)$
- 距離保存

■ 5.2 アフィン変換群

$$x \mapsto Ax + b$$

- $A \in GL(n)$
- 平行性保存

■ 5.3 射影変換群

$$PGL(n)$$

$$[x] \mapsto [Ax]$$

- 比率保存

■ 5.4 共形変換群

$$f : X \rightarrow X$$

- 角度保存

■ 5.5 関数変換群

● 離散群

$$\mathbb{Z}, S_n$$

● 連続群 (Lie群)

$$SO(n), SU(n)$$

⑥ 総まとめ (比較表)

■ 6.1 集合・空間・対称性

概念	数学的定義	本質
集合	X	要素の集まり
空間	(X, \mathcal{S})	構造付き集合

概念	数学的定義	本質
対称性	$\varphi : X \rightarrow X$	構造保存写像

■ 6.2 空間の比較

空間	定義	特徴
\mathbb{R}^n	実ベクトル空間	距離・内積
\mathbb{C}^n	複素空間	ユニタリ構造
ヒルベルト空間	完備内積空間	無限次元

■ 6.3 変換群の比較

群	変換	保存量
ユークリッド群	$Ax + b$	距離
アフィン群	$Ax + b$	平行性
射影群	$PGL(n)$	比
共形群	角度保存	角度
Lie群	連続変換	物理対称性

⑦ 最重要まとめ

対称性 = 空間構造を保つ変換群

そして

物理学では \Rightarrow 保存則に対応 (Noether定理)

次への橋渡し (第2の質問への準備)

ここまでで：

- 対称性 = 変換群
- 空間 = 構造付き集合

が整理されました。

👉 次は自然に：

- Lie群とLie代数
- 連続対称性
- Noether定理 (保存則)

へ進めます。

英治さん、もしよろしければ次は：

👉 「対称性 → 保存則 (Noether定理)」を完全に数式で導出

を一緒にやりましょう。

📄 🍌 🗣️ 📌 🔄 …

第2の質問です。最初に、物理学の「保存則」の説明と定義をしてください。次に、「エネルギー保存則」「運動量保存則」「角運動量保存則」、そして「空間反転 (パリティ変換 (P変換))」「荷電共役 (C変換)」「時間反転 (T変換)」と、以上の「空間」の「変換」における「保存則」としての「電荷対称性」「バリオン数対称性 (N)」「アイソスピン対称性 (荷電対称性) (I)」について、数学用語であるベクトル、行列、テンソル等の表記をもちいて、段階的に説明し定義してください。まとめとして、比較表を作成してください。

英治さん、承知しました。

今回は、物理学の保存則を、できるだけ数学的に整理しながら、

1. 保存則の一般定義
2. エネルギー・運動量・角運動量の保存則
3. P, C, T 変換
4. 電荷・バリオン数・アイソスピンの対称性
5. 全体の比較表

という順序で、段階的に説明します。

1. 物理学における「保存則」の説明と定義

1.1 保存則の基本的意味

物理学で「保存則」とは、時間発展の前後で変化しない物理量が存在することです。

ある物理量 Q が保存されるとは、

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

であることを意味します。

より一般には、時刻 t_1, t_2 に対して

$$Q(t_1) = Q(t_2)$$

です。

1.2 粒子系での保存則

粒子が N 個ある系で、粒子 a の位置を q_a^i 、運動量を p_a^i とすると、保存量 Q は一般に

$$Q = Q(q_a^i, p_a^i, t)$$

という関数です。

保存則は

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \sum_{a,i} \left(\frac{\partial Q}{\partial q_a^i} \dot{q}_a^i + \frac{\partial Q}{\partial p_a^i} \dot{p}_a^i \right) = 0$$

で表されます。

1.3 場の理論での保存則

場 $\phi(x)$ に対しては、保存則は保存流 j^μ を用いて

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

と書かれます。

ここで

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$$

であり、

- ρ : 保存量密度
- \mathbf{j} : 流れ

です。

この式を3次元表示すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

です。これを連続の方程式といいます。

空間全体で積分すると

$$Q = \int \rho(\mathbf{x}, t) d^3x$$

に対して

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

となります。

1.4 対称性と保存則

Noether の定理により、

$$\boxed{\text{連続対称性} \implies \text{保存則}}$$

です。

たとえば：

- 時間並進対称性 \rightarrow エネルギー保存
- 空間並進対称性 \rightarrow 運動量保存
- 回転対称性 \rightarrow 角運動量保存

2. エネルギー保存則

2.1 古典力学での定義

ラグランジアン

$$L(q^i, \dot{q}^i, t)$$

を考えます。

時間に陽に依存しないとき

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

エネルギー

$$E = \sum_i \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L$$

が保存されます：

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

2.2 ハミルトン形式

正準運動量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

を導入すると、ハミルトニアン

$$H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}^i - L$$

であり、 $\partial H / \partial t = 0$ なら

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

です。通常、これをエネルギー保存とみなします。

2.3 場の理論での表現

エネルギーと運動量は、エネルギー-運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ で表されます。

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

特に $\nu = 0$ の成分はエネルギー保存に対応し、

$$\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$$

です。

全エネルギーは

$$E = \int T^{00} d^3x$$

で与えられます。
ここで T^{00} はエネルギー密度です。

3. 運動量保存則

3.1 粒子系

粒子 a の運動量ベクトルを \mathbf{p}_a とすると、全運動量は

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a$$

です。

外力の総和が 0 なら

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$$

です。

3.2 空間並進対称性との関係

空間座標の平行移動

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

に対して物理法則が不変なら、運動量が保存されます。

3.3 場の理論での表現

$$\partial_\mu T^{\mu i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

が運動量保存に対応します。

全運動量は

$$P^i = \int T^{0i} d^3x$$

です。

ここで T^{0i} は運動量密度、またはエネルギー流束に対応します。

4. 角運動量保存則

4.1 粒子系での定義

位置ベクトル \mathbf{r} 、運動量 \mathbf{p} に対して角運動量は

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

です。

成分表示では

$$L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$$

です。ここで ϵ_{ijk} は Levi-Civita 記号です。

全角運動量は

$$\mathbf{J} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$$

で、外力モーメントが 0 なら

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0$$

です。

4.2 回転対称性との関係

無限小回転を

$$x'^i = x^i + \omega^i_j x^j$$

と書きます。

$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ は反対称行列です。

空間回転に対してラグランジアンが不変なら、角運動量が保存されます。

4.3 場の理論での表現

角運動量流テンソル

$$M^{\mu\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu}$$

を定義すると、

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\rho} = 0$$

です。

これが角運動量保存です。

5. P, C, T 変換

ここからは「連続変換」ではなく、主に離散変換です。

これらは必ずしも Noether 保存量を与えませんが、理論の対称性として非常に重要です。

5.1 空間反転 P (パリティ変換)

空間座標を反転します：

$$P: \quad \mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}, \quad t \mapsto t$$

4 元ベクトル $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ では

$$x'^\mu = P^\mu_\nu x^\nu$$

$$P^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ベクトルの変換

通常の極ベクトル \mathbf{v} は

$$\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$$

となります。

例：位置 \mathbf{r} 、運動量 \mathbf{p} 、電場 \mathbf{E}

軸性ベクトルの変換

角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ は

$$\mathbf{L} \mapsto \mathbf{L}$$

です。

これは2つの符号反転が打ち消し合うからです。

パリティ保存

理論が P に対して不変であるとは

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(t, -\mathbf{x})$$

が成り立つことです。

電磁相互作用や強い相互作用ではほぼ成り立ちますが、弱い相互作用では破れます。

5.2 荷電共役 C

粒子を反粒子に入れ替える変換です。

たとえば複素スカラー場 ϕ では

$$C: \phi \mapsto \phi^*$$

Dirac スピノル ψ では

$$\psi \mapsto \psi^C = C\bar{\psi}^T$$

です。ここで C は荷電共役行列です。

電磁流 j^μ は

$$j^\mu \mapsto -j^\mu$$

となります。

したがって、電荷 Q は

$$Q \mapsto -Q$$

です。

荷電共役対称性

理論が C に対して不変であるとは、粒子と反粒子を交換してもラグランジアンが不変なことです。

5.3 時間反転 T

時間反転は

$$T: t \mapsto -t, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$$

です。

運動量は

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}} \mapsto -\mathbf{p}$$

角運動量も

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \mapsto -\mathbf{L}$$

です。

量子力学では T は通常、反ユニタリ作用素として表されます。
波動関数 ψ に対して

$$T\psi(\mathbf{x}, t) = \psi^*(\mathbf{x}, -t)$$

のように複素共役を伴います。

時間反転対称性

理論が T に対して不変であるとは、時間を逆向きにしても方程式の形が保たれることです。

6. P, C, T と保存則の関係

ここで重要な点があります。

P, C, T は主に離散対称性であり、通常の Noether 保存量は直接与えない

つまり、

- 時間並進 \rightarrow エネルギー保存
- 空間並進 \rightarrow 運動量保存
- 回転 \rightarrow 角運動量保存

のような関係とは少し違います。

ただし、理論が P, C, T に対して不変かどうかは、相互作用の性質を非常に強く制限します。

特に有名なのは

CPT 定理

で、局所 Lorentz 不変な量子場理論では、通常

CPT

の組み合わせは保存されます。

7. 電荷対称性と電荷保存

7.1 電荷保存の定義

電荷密度 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 、電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ に対して

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

が成り立つとき、全電荷

$$Q = \int \rho(\mathbf{x}, t) d^3x$$

は保存されます：

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

7.2 数学的背景：U(1) 対称性

複素場 ψ に対して

$$\psi \mapsto e^{i\alpha} \psi$$

という位相変換を考えます。

これは $U(1)$ 群です。

ラグランジアンがこの変換に不変なら、Noether 流

$$j^\mu$$

が存在し、

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

となります。対応する保存量が電荷です。

つまり

$$\boxed{U(1) \text{ 位相対称性} \implies \text{電荷保存}}$$

です。

8. バリオン数対称性 N

ここではご指定に従って N と書きます。通常は B と書くことが多いです。

8.1 定義

バリオン数とは、バリオンに $+1$ 、反バリオンに -1 、その他に 0 を与える量です。

例：

- 陽子 p : $N = 1$
- 中性子 n : $N = 1$
- 反陽子 \bar{p} : $N = -1$
- 電子 e^- : $N = 0$

全バリオン数

$$N = \sum_a N_a$$

が一定なら、バリオン数保存です。

8.2 場の理論での表現

バリオン場 ψ_B に対して、全体位相変換

$$\psi_B \mapsto e^{i\beta} \psi_B$$

を考えると、対応する Noether 流

$$j_B^\mu = \bar{\psi}_B \gamma^\mu \psi_B$$

が得られ、

$$\partial_\mu j_B^\mu = 0$$

なら、全バリオン数

$$N = \int j_B^0 d^3x$$

が保存されます。

8.3 意味

これは「バリオンが勝手に消滅しない」という経験的則を表します。標準模型の摂動論レベルではほぼ保存されますが、より深い理論では厳密でない可能性があります。

9. アイソスピン対称性 I

9.1 基本的考え方

陽子 p と中性子 n は、強い相互作用の観点では非常によく似ています。そこで 2 成分ベクトル

$$N(x) = \begin{pmatrix} p(x) \\ n(x) \end{pmatrix}$$

を導入します。これをアイソスピン二重項とみなします。

9.2 $SU(2)$ 変換

アイソスピン変換は

$$N \mapsto UN, \quad U \in SU(2)$$

です。

無限小変換では

$$U \approx I + i\alpha_a \frac{\tau_a}{2}$$

ここで

- τ_a は Pauli 行列
- α_a は実パラメータ

です。

Pauli 行列は

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

です。

9.3 保存流

アイソスピン対称性に対応して3つのNoether流

$$J_a^\mu = \bar{N} \gamma^\mu \frac{\tau_a}{2} N \quad (a = 1, 2, 3)$$

が定義され、

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0$$

なら、対応する保存量

$$I_a = \int J_a^0 d^3x$$

が保存されます。

9.4 荷電対称性との関係

アイソスピンの第3成分 I_3 は、陽子と中性子を区別する量として働きます。

$$I_3(p) = +\frac{1}{2}, \quad I_3(n) = -\frac{1}{2}$$

強い相互作用では、陽子と中性子の差を無視すれば、近似的に

$$SU(2)$$

対称性が成立します。

これがアイソスピン対称性です。

10. ベクトル・行列・テンソルの観点からの整理

10.1 ベクトル

- 位置： \mathbf{r}
- 運動量： \mathbf{p}
- 電流： \mathbf{j}

回転や反転の下で変換されます。

10.2 行列

- 回転行列 $R \in SO(3)$
- パリティ行列 P^μ_ν
- アイソスピン変換行列 $U \in SU(2)$
- 荷電共役行列 C

対称性は、これらの行列による作用として表現されます。

10.3 テンソル

- エネルギー-運動量テンソル $T^{\mu\nu}$
- 角運動量流テンソル $M^{\mu\nu\rho}$

保存則はテンソルの発散が 0 であることとして書かれます：

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu M^{\mu\nu\rho} = 0$$

11. 比較表

11.1 主要な保存則

保存量	数学的表現	対応する対称性	備考
エネルギー E	$\frac{dE}{dt} = 0$	時間並進 $t \mapsto t + a$	ハミルトニアン保存
運動量 \mathbf{P}	$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$	空間並進 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$	ベクトル保存量
角運動量 \mathbf{J}	$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0$	回転 $R \in SO(3)$	軸性ベクトル

11.2 場の理論での保存式

物理量	密度・流	保存式	全保存量
一般保存量	$j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$	$\partial_\mu j^\mu = 0$	$Q = \int \rho d^3x$
エネルギー	T^{00}	$\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$	$E = \int T^{00} d^3x$
運動量	T^{0i}	$\partial_\mu T^{\mu i} = 0$	$P^i = \int T^{0i} d^3x$
角運動量	$M^{\mu\nu\rho}$	$\partial_\mu M^{\mu\nu\rho} = 0$	$J^{\nu\rho} = \int M^{0\nu\rho} d^3x$

11.3 離散変換 P, C, T

変換	数学的作用	何を変えるか	保存量との関係
P	$\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$	空間の向き	通常は Noether 保存量を直接与えない
C	粒子 \leftrightarrow 反粒子	電荷の符号	$Q \mapsto -Q$
T	$t \mapsto -t$	時間の向き	反ユニタリー変換

11.4 内部対称性と保存量

対称性	群	場の変換	保存量
電荷対称性	$U(1)$	$\psi \mapsto e^{i\alpha} \psi$	電荷 Q
バリオン数対称性	$U(1)$	$\psi_B \mapsto e^{i\beta} \psi_B$	バリオン数 N

対称性	群	場の変換	保存量
アイソスピン対称性	$SU(2)$	$N \mapsto UN$	I_a

12. 全体のまとめ

今回の内容を一つの式の流れでまとめると、

$$\boxed{\text{対称性} \longrightarrow \text{保存流} \longrightarrow \text{保存量}}$$

です。

具体的には

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \implies Q = \int j^0 d^3x = \text{const.}$$

です。

そして対称性には 2 種類あります。

12.1 時空の連続対称性

- 時間並進
- 空間並進
- 回転

これらは

- エネルギー
- 運動量
- 角運動量

の保存を与えます。

12.2 内部対称性

- $U(1)$ 電荷対称性
- バリオン数対称性
- $SU(2)$ アイソスピン対称性

これらは

- 電荷
- バリオン数
- アイソスピン

の保存を与えます。

一方で、

- P
- C
- T

は主に**離散対称性**であり、理論の不変性を調べるための重要な変換ですが、通常の意味での Noether 保存量を直接は与えません。

次の段階としては、今回の内容をさらに深めて、

「Noetherの定理を、ラグランジアンから実際に数式で導出する」

のがもっとも自然です。

ここでは、

$$\delta\phi, \delta\mathcal{L}, j^\mu$$

を実際に計算しながら、

- エネルギー保存
- 運動量保存
- 電荷保存

がどのように一つの統一原理から出るかを示せます。

📄 🍷 🗨️ 📌 🔄 …

第3の質問です。素粒子論における「相互作用」、つまり「強い相互作用」「電弱相互作用」「弱い相互作用」「重力」について、数学术語で説明し定義してください。次に、それら「相互作用」において、先に定義された「対称性（保存則）」において、それぞれの「対称性があるか」「対称性が敗れているか」特を定め、段階的に説明してください。それらの比較表を作成してください。そして、その「対称性の破れ」について、現在、どのように解釈されているかを、数学术語を

英治さん、承知しました。

今回は第3の質問として、**素粒子論における相互作用**を、できるだけ**数学术語**で整理し、そのあとで各相互作用に対して

- どの対称性があるか
- どの対称性が保たれるか
- どの対称性が破れているか
- その「対称性の破れ」を現在どう解釈しているか

を段階的に説明します。

少し整理して書くと、ここで扱う相互作用は

1. 強い相互作用
2. 電磁相互作用
3. 弱い相互作用
4. 電弱理論（電磁相互作用 + 弱い相互作用の統一理論）
5. 重力相互作用

です。

ご文中の「電弱相互作用」と「弱い相互作用」は区別して説明した方が数学的に明確なので、そのように進めます。

1. 素粒子論における「相互作用」の数学的定義

1.1 一般的定義

場の理論では、相互作用はラグランジアン密度

の中の相互作用項として表されます。

一般に

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

です。

- $\mathcal{L}_{\text{free}}$: 自由場
- \mathcal{L}_{int} : 相互作用

相互作用とは、ある場 ϕ, ψ, A_μ, \dots が他の場と結合することです。
数学的には、場の積や共変微分やゲージ曲率を通して表されます。

1.2 ゲージ理論としての定式化

現代の素粒子論では、相互作用は主にゲージ対称性によって記述されます。

場 $\psi(x)$ に対して局所変換

$$\psi(x) \mapsto U(x)\psi(x)$$

を考えます。

ここで

$$U(x) \in G$$

であり、 G はゲージ群です。

この局所対称性を保つために、通常の微分

$$\partial_\mu$$

を共変微分

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$$

に置き換えます。

ここで

- g : 結合定数
- A_μ : ゲージ場

です。

さらに場の強さは曲率テンソル

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$$

で表されます。

2. 強い相互作用

2.1 定義

強い相互作用は、クォークとグルーオンの間の相互作用であり、
その対称群は

$$SU(3)_c$$

です。ここで c は color を表します。

クォーク場を

$$q(x)$$

とすると、局所ゲージ変換は

$$q(x) \mapsto U(x)q(x), \quad U(x) \in SU(3)$$

です。

2.2 QCD のラグランジアン

量子色力学 (QCD) のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \sum_f \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f)q_f$$

です。

ここで

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s T^a G_\mu^a$$

- G_μ^a : グルーオン場
- T^a : $SU(3)$ の生成子
- g_s : 強結合定数

です。

また

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$$

です。

この最後の

$$g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$$

が、グルーオン同士も相互作用することを示しています。

2.3 強い相互作用の対称性

強い相互作用では主に次が重要です。

(a) ゲージ対称性

$$SU(3)_c$$

これは厳密な局所対称性です。

(b) 空間・時間対称性

- 時間並進
- 空間並進
- 回転
- ローレンツ対称性

したがって

- エネルギー保存
- 運動量保存
- 角運動量保存

があります。

(c) 離散対称性

QCD は通常、

- P
- C
- T

をほぼ保ちます。

したがって CP も強い相互作用では非常によく保たれます。

ただし理論的には θ -項

$$\mathcal{L}_\theta = \theta \frac{g_s^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}$$

が許され、これは CP を破ります。

実験的には θ が極めて小さいので、これを強い CP 問題と呼びます。

(d) 近似的フレーバー対称性

軽いクォーク u, d に対して

$$SU(2)_L \times SU(2)_R$$

や、場合によっては

$$SU(3)_f$$

という近似対称性が現れます。

これらは厳密ではなく、質量差により破れています。

3. 電磁相互作用

3.1 定義

電磁相互作用は、電荷をもつ粒子と電磁場 A_μ の相互作用です。

ゲージ群は

$$U(1)_{\text{em}}$$

です。

場 ψ の局所変換は

$$\psi(x) \mapsto e^{iq\alpha(x)}\psi(x)$$

です。

3.2 QED のラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

です。

ここで

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

です。

3.3 電磁相互作用の対称性

(a) ゲージ対称性

$$U(1)_{\text{em}}$$

(b) 保存則

この対称性から電荷保存：

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad Q = \int j^0 d^3x = \text{const.}$$

(c) 離散対称性

QED は通常

- P
- C
- T

をそれぞれ保ち、

- CP
- CPT

も保ちます。

(d) 時空対称性

もちろん

- エネルギー保存
- 運動量保存
- 角運動量保存

があります。

4. 弱い相互作用

4.1 定義

弱い相互作用は、 W^\pm, Z^0 ボソンによって媒介される相互作用です。

本質的なゲージ群は

$$SU(2)_L$$

です。

添字 L は、左手系のフェルミオンだけに作用することを意味します。

フェルミオン二重項の例：

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad Q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

です。

4.2 相互作用の形

共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a$$

です。

ここで

- W_μ^a は $SU(2)$ ゲージ場
- τ^a は Pauli 行列

です。

4.3 弱い相互作用の特徴

弱い相互作用はキラルです。

すなわち、左手成分

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi$$

には作用しますが、右手成分

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi$$

には同じようには作用しません。

これが離散対称性の破れの本質です。

4.4 弱い相互作用で保たれる・破れる対称性

保たれるもの

- エネルギー保存
- 運動量保存
- 角運動量保存
- ゲージ構造 $SU(2)_L$ (電弱対称性の枠組みの中で)

破れるもの

(a) パリティ P の破れ

弱い相互作用は P を最大限に破ります。

$$\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$$

に対して左手系と右手系が入れ替わりますが、弱い相互作用は左手系のみを特別扱いするので不変ではありません。

(b) 荷電共役 C の破れ

粒子と反粒子を同等に扱わないため、 C も破れます。

(c) CP の破れ

中性K中間子やB中間子系で CP 破れが観測されます。
標準模型では CKM 行列の複素位相により説明されます。

(d) アイソスピン対称性

強い相互作用の近似対称性としてのアイソスピンは、弱い相互作用では一般には保たれません。
なぜなら u と d を別々の電荷・結合の仕方扱うからです。

5. 電弱理論

5.1 定義

電磁相互作用と弱い相互作用は、高エネルギーでは統一されて

$$SU(2)_L \times U(1)_Y$$

というゲージ理論として記述されます。

これが電弱理論です。

ここで

- $SU(2)_L$: 弱アイソスピン
- $U(1)_Y$: 弱超電荷

です。

5.2 電弱ラグランジアン of 構造

場の内容を簡略化して書くと

$$\mathcal{L}_{EW} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi + (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - V(\Phi)$$

です。

ヒッグス場 Φ は複素二重項で、

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

です。

5.3 自発的対称性の破れ

ヒッグス・ポテンシャル

$$V(\Phi) = -\mu^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2$$

を考えると、 $\mu^2 > 0$ のとき真空は $\Phi = 0$ ではなく、

$$\langle\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

を満たします。

このときゲージ対称性

$$SU(2)_L \times U(1)_Y$$

は真空によって

$$U(1)_{\text{em}}$$

へと破れます。

これを

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{\text{em}}$$

と書きます。

5.4 電弱理論で保たれる・破れる対称性

高エネルギーでは保たれる

- $SU(2)_L \times U(1)_Y$

真空状態では破れる

- 電弱対称性は自発的に破れる

破れた後に残る

- $U(1)_{\text{em}}$

保存される量

- 電荷 Q

電荷演算子は

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}$$

です。

ここで

- T_3 : 弱アイソスピン第3成分
- Y : 超電荷

です。

6. 重力相互作用

6.1 定義

重力は一般相対論では、時空の計量テンソル

$$g_{\mu\nu}(x)$$

によって表されます。

重力相互作用は「力」というより、

時空の曲率

として記述されます。

6.2 数学的構造

時空は多様体 M であり、その上にローレンツ計量

$$g_{\mu\nu}$$

が与えられます。

曲率はリーマンテンソル

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$$

Ricci テンソル

$$R_{\mu\nu}$$

Ricci スカラー

$$R$$

で記述されます。

重力場の方程式は Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

です。

6.3 重力の対称性

(a) 一般座標変換不変性

$$x^{\mu} \mapsto x'^{\mu}(x)$$

すなわち微分同相不変性です。

これが重力の基本対称性です。

(b) 局所ローレンツ対称性

局所慣性系ではローレンツ対称性があります。

(c) 保存則

エネルギー運動量テンソルに対して

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$$

が成り立ちます。

ここで ∇_{μ} は共変微分です。

ただし、平坦時空のような単純な意味での全エネルギー保存は、一般曲がった時空では微妙になります。

つまり重力では保存則は局所的に書かれる、という点が重要です。

7. 各相互作用と対称性の整理

ここで、前回までの「対称性」「保存則」と結びつけて整理します。

7.1 強い相互作用

保たれる対称性

- 時間並進対称性
- 空間並進対称性
- 回転対称性
- ローレンツ対称性
- $SU(3)_c$ ゲージ対称性
- 電荷保存
- バリオン数保存 (標準模型の通常の範囲で近似的/実効的によく成り立つ)
- P, C, T はほぼ保存
- CP は通常ほぼ保存

破れる/厳密でない対称性

- フレーバー $SU(2), SU(3)$ は質量差により近似対称性
- θ -項があれば CP は破れうる

7.2 電磁相互作用

保たれる対称性

- 時間並進対称性
- 空間並進対称性
- 回転対称性
- ローレンツ対称性
- $U(1)_{em}$
- 電荷保存
- P, C, T, CP

破れ

- 特に基本相互作用としては目立った破れはない

7.3 弱い相互作用

保たれる対称性

- 時間並進対称性
- 空間並進対称性
- 回転対称性
- ローレンツ対称性
- 電弱ゲージ構造の中での局所対称性
- 電荷保存

破れる対称性

- P 破れ
- C 破れ
- CP 破れ (小さいが確実)
- フレーバー対称性の破れ
- アイソスピン対称性の非保存

7.4 電弱理論

保たれる対称性

- 基本ラグランジアンは

$$SU(2)_L \times U(1)_Y$$

に対して不変

破れる対称性

- 真空が対称でないため、自発的対称性の破れが起こる：

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$$

残る対称性

- $U(1)_{em}$
- 電荷保存

7.5 重力

保たれる対称性

- 微分同相不変性
- 局所ローレンツ対称性
- 局所的エネルギー運動量保存

破れる対称性

- 特定の時空解では、平坦空間の並進対称性・回転対称性が全体としてはない場合がある
- つまり「方程式の対称性」と「解の対称性」は区別が必要

8. 比較表

8.1 相互作用と数学的構造

相互作用	基本場	ゲージ群 / 幾何学	ラグランジアンを中心構造
強い相互作用	クォーク q , グルオン G_μ^a	$SU(3)_c$	$-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q$
電磁相互作用	荷電粒子 ψ , 光子 A_μ	$U(1)_{em}$	$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$
弱い相互作用	左手フェルミオン, W_μ^a, Z_μ	$SU(2)_L$	$\bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu \psi_L$
電弱理論	フェルミオン, W_μ^a, B_μ , ヒッグス Φ	$SU(2)_L \times U(1)_Y$	ゲージ場 + フェルミオン + ヒッグス項
重力	計量 $g_{\mu\nu}$	微分同相群	$R, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$

8.2 どの対称性が保たれ、どれが破れるか

相互作用	保たれる主対称性	破れる主対称性	備考
強い相互作用	$SU(3)_c$, ローレンツ, 並進, 回転, P, C, T ほぼ保存	近似フレーバー対称性は質量差で破れ, CP は理論上破れ得る	強いCP問題がある
電磁相互作用	$U(1)_{em}$, P, C, T, CP , 並進, 回転	基本的には顕著な破れなし	電荷保存の典型例
弱い相互作用	ローレンツ, 電荷保存	P, C, CP (小さいが破れ)	左手性が本質
電弱理論	基本ラグランジアンは $SU(2)_L \times U(1)_Y$	真空が電弱対称性を自発的に破る	残るのは $U(1)_{em}$
重力	微分同相不変性, 局所ローレンツ対称性	特定解では全体対称性が減ることがある	方程式と解の対称性を区別

8.3 保存則との対応

対称性	保存量	強い	電磁	弱い	電弱	重力
時間並進	エネルギー	○	○	○	○	局所的に○
空間並進	運動量	○	○	○	○	局所的に○
回転	角運動量	○	○	○	○	局所的に○
$U(1)$ 位相	電荷	○	○	○	最終的に○	該当なし
バリオン数	バリオン数	ほぼ○	○	近似的	近似的	該当なし
アイソスピン	I_a	近似的○	破れる	破れる	破れる	該当なし
P	離散対称性	ほぼ○	○	×	×	文脈依存
C	離散対称性	ほぼ○	○	×	×	文脈依存
T	離散対称性	ほぼ○	○	CPTのもとで重要	CPTのもとで重要	文脈依存

9. 「対称性の破れ」は現在どう解釈されているか

ここが今回の中心です。

現代物理学では、対称性の破れは大きく分けて次のように解釈されます。

9.1 明示的対称性の破れ

ラグランジアンそのものが対称でない場合です。

たとえば質量項や結合定数の違いによって、ある変換に対して

$$\mathcal{L}[\phi] \neq \mathcal{L}[g\phi]$$

となる場合です。

例：

- u クォークと d クォークの質量差によるアイソスピン対称性の破れ
- 電磁相互作用によるフレーバー対称性の破れ

これは方程式そのものに非対称性が入っているという意味です。

9.2 自発的対称性の破れ

ラグランジアンは対称だが、真空状態が対称でない場合です。

$$\mathcal{L}[g\phi] = \mathcal{L}[\phi]$$

であるにもかかわらず、

$$g\langle 0|\phi|0\rangle \neq \langle 0|\phi|0\rangle$$

となります。

典型例はヒッグス機構です。

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{em}}$$

これは「法則は対称だが、自然が選んだ真空が対称ではない」という解釈です。

9.3 異常 (anomaly) による破れ

古典論では対称だが、量子化すると破れる場合です。

古典的には

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

であっても、量子効果により

$$\partial_\mu j^\mu \neq 0$$

となることがあります。

これは量子異常です。

例：

- 軸性電流の異常
- バリオン数・レプトン数に関わる異常的効果

現代的には、対称性の破れは単なる「欠陥」ではなく、量子理論の整合性や真空構造を示す深い情報と解釈されます。

9.4 幾何学的・表現論的解釈

数学的には、対称性の破れは

- 群 G の対称性が
- 部分群 $H \subset G$ に縮退する

こととして表されます。

$$G \rightarrow H$$

電弱理論では

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$$

です。

このとき真空の縮退空間はしばしば商空間

$$G/H$$

で表されます。

これは幾何学的には「真空多様体」です。

9.5 現在の標準的理解

現在の解釈をまとめると：

対称性の破れ = 自然法則の欠如ではなく、真空構造・質量生成・量子効果の表現

です。

つまり、対称性の破れは

- なぜ粒子に質量があるか
- なぜ左手系と右手系が非対称か
- なぜ粒子と反粒子が完全には対等でないか
- なぜ近似対称性しか見えないのか

を説明するための中心概念になっています。

10. 全体のまとめ

今回の内容を一つの流れでまとめると、

相互作用 \longleftrightarrow ゲージ群・幾何学構造 \longleftrightarrow 対称性 \longleftrightarrow 保存則

です。

さらに、

対称性の破れ

は、現代物理学では

1. 明示的破れ
2. 自発的破れ
3. 量子異常による破れ

として理解されます。

特に重要なのは、

- 強い相互作用： $SU(3)_c$ を基本とする
- 電磁相互作用： $U(1)_{em}$ による電荷保存
- 弱い相互作用： P, C, CP を破る
- 電弱理論：ヒッグス機構により

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$$

- 重力：微分同相不変性を持つ幾何学理論

という点です。

次に自然につながる第4の話題は、

Noether定理を用いて、これらの相互作用から保存流 j^μ を実際に導出することです。

そこまで進むと、今回の「対称性」「保存則」「対称性の破れ」が一つの数式体系としてさらにきれいにつながります。

📄 🗨️ 🔄 ⬆️ ⬇️ ⋮

最後の質問です。以上において説明し定義された数学における「対称性」と物理学における「保存則」との関連について、数学用語を用いて段階的に説明してください。そして、今後の、このテーマにおける課題と展望を教えてください。

英治さん、ここまでの議論をふまえると、

今回の主題は、つぎの一つの原理に集約できます。

数学における対称性 → 物理学における保存則

そして、その中心にあるのが **Noether (ネーター) の定理** です。

以下では、これを**数学用語**で、段階的に整理して説明します。最後に、今後の課題と展望もまとめます。

1. 出発点：数学における「対称性」とは何か

数学における対称性とは、すでに見たように、

$$X \rightarrow X$$

という自己写像のうち、ある**構造**を保つものです。

より正確には、集合 X に構造 \mathcal{S} が入っているとき、

$$(X, \mathcal{S})$$

の対称性とは、この構造を不変にする自己同型写像

$$\varphi : X \rightarrow X \text{ のことです。}$$

たとえば：

- 順序構造なら順序を保つ写像
- 代数構造なら演算を保つ写像
- 位相構造なら連続な自己同型
- 幾何構造なら距離・角度・計量を保つ変換

です。

したがって、数学的には

対称性 = 構造保存自己同型

です。

2. 物理学における「状態空間」と「法則」

物理学では、対象は単なる集合ではなく、何らかの**状態空間**の上で定義されます。

たとえば：

- 古典力学では相空間

$$M = \{(q^i, p_i)\}$$

- 場の理論では場の空間

$$\mathcal{F} = \{\phi(x)\}$$

- 量子力学ではヒルベルト空間

$$\mathcal{H}$$

です。

物理法則は、この空間の上の関数や汎関数として与えられます。

代表例はラグランジアン L またはラグランジアン密度 \mathcal{L} です。

$$L(q, \dot{q}, t), \quad \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

ここで重要なのは、**物理法則の対称性**とは、状態空間上の変換に対してラグランジアンが不変であることだ、ということです。

つまり、変換 g に対して

$$L \mapsto L'$$

が起きても、

$$L' = L \quad \text{あるいは} \quad \delta L = 0$$

なら、その理論は対称性をもつといいます。

3. 数学的対称性が物理では「群作用」として表される

対称性は普通、群 G の作用として表されます。

$$G \curvearrowright X$$

すなわち、各 $g \in G$ に対して写像

$$x \mapsto g \cdot x$$

が定まり、

$$e \cdot x = x, \quad (g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$$

を満たします。

物理では、この群作用が

- 時空への作用
- 場への作用

- 内部自由度への作用

として現れます。

たとえば：

- 時間並進群 $(\mathbb{R}, +)$
- 空間並進群 $(\mathbb{R}^3, +)$
- 回転群 $SO(3)$
- ローレンツ群 $SO(1, 3)$
- 内部対称群 $U(1), SU(2), SU(3)$

です。

つまり、物理学における対称性とは、

群が状態空間または場の空間に作用し、その法則を不変にすること

です。

4. 保存則とは何か

保存則とは、時間発展において変化しない量の存在です。

ある物理量 Q について

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

なら Q は保存量です。

場の理論では、これが局所的には保存流 j^μ を用いて

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

と書かれます。

これは連続の方程式です。

空間全体で積分すると

$$Q = \int j^0 d^3x$$

が時間に依らず一定になります。

したがって、

保存則 = ある量に対して連続方程式が成り立つこと

です。

5. 両者をつなぐ核心：Noether の定理

ここで数学と物理が直接結びつきます。

Noether の定理は、

ラグランジアン連続対称性 \implies 保存流の存在

を主張します。

5.1 有限次元の場合

ラグランジアン

$$L(q^i, \dot{q}^i, t)$$

が変換

$$q^i \mapsto q^i + \varepsilon \delta q^i$$

に対して不変であるとして。

このとき対応する保存量

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i$$

が得られ、

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

となります。

5.2 場の理論の場合

場 $\phi^A(x)$ に対して無限小変換

$$\phi^A \mapsto \phi^A + \varepsilon \delta \phi^A$$

を考えます。

ラグランジアン密度 \mathcal{L} がこの変換に対して不変なら、Noether 流

$$j^\mu = \sum_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^A)} \delta \phi^A$$

が得られ、

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

となります。

これが保存則です。

6. 具体例：数学的対称性から物理的保存則へ

ここで、対称性と保存則の対応を数学的に整理します。

6.1 時間並進対称性 → エネルギー保存

時間の変換

$$t \mapsto t + a$$

は加法群 $(\mathbb{R}, +)$ の作用です。

ラグランジアンが時間に陽に依存しない：

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

なら、保存量としてハミルトニアン

$$H = \sum_i p_i \dot{q}^i - L$$

が得られます。

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

これがエネルギー保存です。

6.2 空間並進対称性 → 運動量保存

空間座標の変換

$$x^i \mapsto x^i + a^i$$

に対して理論が不変なら、保存量は運動量ベクトル

$$P^i$$

になります。

場の理論では、これはエネルギー-運動量テンソル

$$T^{\mu\nu}$$

の保存式

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

から導かれます。

$$P^i = \int T^{0i} d^3x$$

です。

6.3 回転対称性 → 角運動量保存

回転群

$$SO(3)$$

が系の対称群であるとき、対応する保存量は角運動量です。

有限次元では

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

場の理論では角運動量流テンソル

$$M^{\mu\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu}$$

に対して

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\rho} = 0$$

が成り立ちます。

6.4 内部対称性 → 電荷保存

複素場 ψ に対する位相変換

$$\psi \mapsto e^{i\alpha} \psi$$

は $U(1)$ 群の作用です。

ラグランジアンがこの変換で不変なら、Noether 流 j^μ が存在し、

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

となります。

これに対応する保存量

$$Q = \int j^0 d^3x$$

が電荷です。

6.5 $SU(2)$, $SU(3)$ の対称性 → 内部量の保存

たとえば：

- アイソスピン対称性 $SU(2)$
- 色対称性 $SU(3)$

などの内部対称群があると、それぞれに対応する生成子 T^a があり、Noether 流

$$J_a^\mu$$

が得られます。

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0$$

であれば、対応する電荷

$$Q_a = \int J_a^0 d^3x$$

が保存されます。

7. 数学的に見ると、保存量は「生成子」に対応する

群論の立場から見ると、連続対称性は Lie 群であり、その無限小対称性は Lie 代数の元で表されます。

たとえば：

- 時間並進の生成子 $\leftrightarrow H$
- 空間並進の生成子 $\leftrightarrow P_i$
- 回転の生成子 $\leftrightarrow J_i$

です。

量子力学ではこれらは作用素として現れ、交換関係を満たします。

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$$

$$[J_i, P_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}P_k$$

つまり、保存量とは単なる数ではなく、

対称群の生成子の物理的実現

とも言えます。

8. 離散対称性と保存則の違い

ここで重要なのは、すべての対称性が Noether 型保存量を与えるわけではない、という点です。

- P (空間反転)
- C (荷電共役)
- T (時間反転)

は離散群 \mathbb{Z}_2 型の対称性であり、連続パラメータをもちません。

そのため普通の意味での Noether 保存流は直接は得られません。

したがって、

連続対称性 \Rightarrow 保存量 離散対称性 \Rightarrow 理論の制約

という区別が必要です。

9. 数学から見たまとめ

以上を数学用語でまとめると、次のようになります。

9.1 構造

物理理論は、ある空間 X の上の構造

$$(X, \mathcal{S})$$

として与えられる。

9.2 群作用

対称性は群 G の作用

$$G \curvearrowright X$$

として表される。

9.3 不変量

ラグランジアンまたは作用汎関数

$$S[\phi] = \int \mathcal{L} d^4x$$

が群作用に対して不変なら、その作用は対称である。

$$S[g \cdot \phi] = S[\phi]$$

9.4 生成子と保存流

Lie 群の無限小生成子に対応して、Noether 流 j^μ が構成され、

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

が成り立つ。

9.5 保存量

保存流の 0 成分を積分すると、保存量

$$Q = \int j^0 d^3x$$

が得られる。

10. 比較的総まとめ表

数学的概念	数学的表現	物理における意味	対応する保存則
自己同型	$\varphi : X \rightarrow X$	対称変換	不変な法則
群作用	$G \curvearrowright X$	変換群	対称性の体系
Lie 群	G	連続対称性	Noether保存量
Lie 代数	\mathfrak{g}	無限小変換	保存量の生成子
不変作用	$S[g\phi] = S[\phi]$	物理法則の対称性	保存流の存在
保存流	$\partial_\mu j^\mu = 0$	局所保存則	電荷・運動量など
保存量	$Q = \int j^0 d^3x$	時間不変量	観測可能量

11. このテーマの今後の課題

ここからは、さらに深い内容に入ります。主な課題は次の通りです。

11.1 Noether 定理の厳密導出

今後の第一の課題は、Noether 定理を実際に導出することです。

特に、

$$\delta S = 0$$

から

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

がどう出るかを、オイラー＝ラグランジュ方程式を用いて厳密に追うことです。

これは、今回の「対称性と保存則」の核心を完全に理解するための最重要課題です。

11.2 Lie 群・Lie 代数・表現論の理解

物理で現れる対称性は多くが Lie 群です。

- $SO(3)$
- $SO(1, 3)$
- $U(1)$
- $SU(2)$
- $SU(3)$

これらの生成子、交換関係、表現論を理解すると、

- スピン
- アイソスピン
- 色荷
- ゲージ場

の意味がはっきりします。

11.3 ゲージ対称性の幾何学化

ゲージ理論は、より深く見ると主束・接続・曲率で記述されます。

- ゲージ場 A_μ は接続
- 場の強さ $F_{\mu\nu}$ は曲率
- ゲージ変換は束の自己同型

という幾何学的理解が、現代物理の中核です。

これは数学と物理の結びつきが最も美しく現れる分野の一つです。

11.4 自発的対称性の破れと真空多様体

対称性は必ずしもそのまま現れるわけではなく、

$$G \rightarrow H$$

という形で破れることがあります。

このとき商空間

$$G/H$$

が真空多様体になります。

今後の課題は、この幾何学的意味を理解することです。

これはヒッグス機構やゴールドストーン粒子の理解につながります。

11.5 量子異常と保存則の破れ

古典的には保存される量が、量子論では保存されないことがあります。

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (\text{classical})$$

が

$$\partial_\mu j^\mu \neq 0 \quad (\text{quantum})$$

となる現象です。

これは「対称性と保存則」が量子レベルでどう変わるか、という極めて重要な課題です。

11.6 重力と対称性

一般相対論では対称性は単なる並進や回転ではなく、

微分同相不変性

になります。

このとき保存則も単純な形ではなく、

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

という共変的な形になります。

さらに量子重力では、時空そのものが量子化される可能性があるため、「対称性」と「保存則」の意味そのものが再検討されます。

12. 展望

このテーマの展望は非常に大きいです。特に次の方向が重要です。

12.1 数学と物理の統一言語としての対称性

対称性は、

- 幾何学
- 代数学
- 位相幾何学
- 表現論
- 場の理論

をつなぐ共通言語です。

したがって、対称性を理解することは、数学と物理を統一的に理解する最短経路の一つです。

12.2 保存則を「不変量の理論」として理解する

保存量は、運動の中で変わらない量です。

数学的には、これは群作用のもとでの不変量です。

この視点を深めると、物理は

変化を記述する学問

であると同時に

変化の中の不変量を探す学問

であることが明確になります。

12.3 現代物理への接続

このテーマは、そのまま次の分野へつながります。

- 標準模型
- 一般相対論
- ゲージ理論
- 超対称性
- 弦理論
- 量子重力
- トポロジカル場の理論

どの分野でも、対称性と保存則は中心概念です。

13. 最終まとめ

今回の全体を一行でまとめると、

数学の対称性とは構造を保つ変換であり、物理の保存則とはその連続対称性に対応する不

です。

もう少し展開すると、

群作用 → 不変作用 → Noether流 → 保存量

という流れになります。

したがって、数学における対称性と物理学における保存則の関係は、単なる類似ではなく、

同じ構造を、数学は変換として見て、物理は保存量として見る

という深い同一性です。

次に進むなら、最も自然なのは

「Noether定理の完全な数式導出」

です。これをやると、今回の全体が一つの計算の中で統一されます。

📄 👍 🗨️ ⬆️ 🔄 …

すばらしいです。物理学と数学の関連が、今回のテーマにおいて明確に整理されて説明されていて、より理解を進めることができました。今回は、ここまでしておきます。ありがとうございました。英治

こちらこそ、英治さん。

今回の対話はとても本質的で、数学と物理の「核」に触れる素晴らしい流れでした。

特に今回のテーマは、

- 対称性 = 構造を保つ変換 (数学)

- 保存則 = 不変量 (物理)
- その橋渡し = Noether定理

という、まさに**現代理論物理の基盤**でしたね。

ここまで整理できていると、次に進むときにすべてがつながって見えてきます：

- Lie群・表現論 → 粒子の分類
- ゲージ理論 → 相互作用の統一
- 幾何学 (束・接続) → 力の本質
- 自発的対称性の破れ → 質量と真空構造

どれも今回の延長線上にあります。

またいつでも続きを一緒に探究していきましょう。

英治さんの問いはとても深く、こちらも毎回とても刺激を受けています。

ありがとうございました。

📄 🗨️ 📌 🔄 …