

対称性と保存則 (II)

北島英治 (2026年4月)

以前、「物理学と数学の関連」として、数学の「対称性」と物理学の「保存則」について対話しました。その対話の最後に、「Noether定理の完全な数式導出」により、全体が一つの計算で統一されることの示唆を受けました。今回、その「定理」を説明し、純粋な数学用語を用いて、段階的に「完全な数式導出」を行ってみてください。そして、いかに数学の「対称性」と物理学の「保存則」と関連するか、数学用語を使って説明して下さい。英治

英治さん、とても本質的な問いです。

今回は、Noether (ノーター) 定理を、できるだけ純粋な数学用語に寄せながら、しかも物理学で使われる形が自然に見えるように、段階的に「完全な数式導出」として示します。

結論を先に言えば、この定理は

連続対称性 = 作用汎関数の不変性

から

保存量 = ある微分量の恒等的消滅

を導く定理です。

つまり、数学では「群作用の不変性」、物理学では「保存則」として現れるものが、変分法を通して同一の構造として現れます。

1. 全体の見取り図

Noether定理の数学的骨格は、次の4段階です。

1. 作用汎関数 S を定義する
2. 1パラメータ変換群が S を不変にするという仮定を置く
3. 変分を計算する
4. Euler-Lagrange方程式の上で、ある量の微分が0になることを示す

この構造は、有限次元の解析力学でも、無限次元の場の理論でも同じです。

2. 数学的準備：変分法の枠組み

2.1 配置空間と曲線

まず、配置空間を滑らかな多様体 Q とします。

力学系の運動は、その上の滑らかな曲線

$$q : [t_1, t_2] \rightarrow Q$$

として表されます。

局所座標を取れば

$$q(t) = (q^1(t), \dots, q^n(t))$$

です。

2.2 接束とラグランジアン

速度を含めるために、 Q の接束 TQ を考えます。
ラグランジアンは滑らかな関数

$$L : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (q, \dot{q}, t) \mapsto L(q, \dot{q}, t)$$

です。

2.3 作用汎関数

曲線 $q(t)$ に対して作用汎関数

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

を定義します。

これは「曲線の集合」上の汎関数です。
変分法では、この S の停留条件

$$\delta S = 0$$

から運動方程式を導きます。

3. Euler–Lagrange 方程式の導出

Noether定理の完全導出には、まず Euler–Lagrange 方程式が必要です。

3.1 変分

曲線 $q(t)$ の変分を

$$q^i(t, \varepsilon) = q^i(t) + \varepsilon \eta^i(t)$$

とします。ここで $\eta^i(t)$ は任意の滑らかな変分ベクトル場で、端点で

$$\eta^i(t_1) = \eta^i(t_2) = 0$$

とします。

すると

$$\delta q^i = \left. \frac{d}{d\varepsilon} q^i(t, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = \eta^i, \quad \delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt} (\delta q^i).$$

3.2 作用の一次変分

$$\delta S = \left. \frac{d}{d\varepsilon} S[q + \varepsilon \eta] \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt.$$

ここで総和規約を使っています。

$$\delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt} \delta q^i$$

を代入すると

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{dt} \delta q^i \right) dt.$$

第2項を部分積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{dt} \delta q^i dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt.$$

端点で $\delta q^i = 0$ だから境界項は消え、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \delta q^i dt.$$

δq^i は任意なので、変分法の基本補題より

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0}$$

を得ます。これが Euler-Lagrange 方程式 です。

4. Noether定理の数学的設定

ここからが本題です。

4.1 パラメータ変換群

配置空間 Q に 1パラメータLie群 $G = \{\Phi_\varepsilon\}$ が作用するとします。

$$\Phi_\varepsilon : Q \rightarrow Q, \quad \Phi_0 = \text{id}, \quad \Phi_{\varepsilon_1} \circ \Phi_{\varepsilon_2} = \Phi_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

その無限小生成元ベクトル場を X とすると

$$X^i(q) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \Phi_\varepsilon^i(q) \right|_{\varepsilon=0}.$$

したがって、無限小変換は

$$\delta q^i = X^i(q).$$

4.2 対称性の定義

ラグランジアン L がこの変換に対して不変であるとは、厳密には

$$L(\Phi_\varepsilon(q), T\Phi_\varepsilon(\dot{q}), t) = L(q, \dot{q}, t)$$

が成り立つことです。

無限小形では

$$\delta L = 0$$

です。座標で書くと

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i.$$

ここで

$$\delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt} \delta q^i$$

なので

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{dt} \delta q^i.$$

5. Noether定理の完全な数式導出 (力学系)

ここが中心です。

5.1 恒等式への変形

上の式に対して、部分積分型の変形を行います。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{dt} \delta q^i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i.$$

よって

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i.$$

整理して

$$\delta L = \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \delta q^i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right).$$

ここで Euler-Lagrange 作用素

$$E_i(L) := \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right)$$

を導入すると

$$\delta L = E_i(L) \delta q^i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right)$$

という恒等式が得られます。

これは Noether定理の核心恒等式です。

5.2 対称性を用いる

いま、変換が対称性であるから

$$\delta L = 0.$$

したがって

$$0 = E_i(L) \delta q^i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right).$$

Euler-Lagrange 方程式の解の上では $E_i(L) = 0$ だから

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) = 0.$$

よって

$$J := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i$$

は保存される、すなわち

$$\frac{dJ}{dt} = 0$$

です。

これが力学系における **Noether定理** です。

6. Noether保存量の意味

一般に共役運動量

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

を用いれば、保存量は

$$J = p_i \delta q^i$$

です。

これは「無限小対称変換の生成方向」に沿った運動量成分です。

数学的には、Lie群作用の無限小生成元 X と Cartan 1-形式 の組合せとして理解できます。

7. 時間変換も含めた拡張形

上では t は不変としましたが、時間も変換される場合が重要です。

7.1 一般の無限小変換

$$t \mapsto t' = t + \varepsilon \tau(q, t), \quad q^i \mapsto q'^i = q^i + \varepsilon \xi^i(q, t).$$

このとき、実際に軌道上で比較すべき「垂直変分」は

$$\delta_0 q^i := \xi^i - \dot{q}^i \tau$$

です。

また、ラグランジアンが厳密に不変でなくても、全微分だけずれる

$$\delta L + L \frac{d\tau}{dt} = \frac{dF}{dt}$$

という形を許します。これを **準対称性** と呼びます。

7.2 拡張Noether定理

このとき保存量は

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} (\xi^i - \dot{q}^i \tau) + L\tau - F$$

であり、運動方程式の上で

$$\frac{dJ}{dt} = 0$$

となります。

7.3 エネルギー保存の導出

時間並進対称性

$$\tau = 1, \quad \xi^i = 0, \quad F = 0$$

を代入すると

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} (0 - \dot{q}^i) + L = L - p_i \dot{q}^i.$$

通常のエネルギー

$$H = p_i \dot{q}^i - L$$

を使えば

$$J = -H$$

なので

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = 0}$$

を得ます。

つまり、時間並進対称性 \implies エネルギー保存 です。

8. 代表例

8.1 空間並進対称性 \implies 運動量保存

1次元で

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q)$$

を考えます。もし $V(q)$ が定数、あるいは一般に L が q に依存しないなら、変換

$$q \mapsto q + \varepsilon$$

は対称性です。したがって

$$\delta q = 1$$

だから保存量は

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q = m \dot{q}.$$

つまり

$$\boxed{p = m \dot{q} = \text{const.}}$$

です。

8.2 回転対称性 \implies 角運動量保存

\mathbb{R}^3 で

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(|\mathbf{r}|)$$

とします。

回転の無限小変換は

$$\delta \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

です。

保存量は

$$J = \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

で、スカラー三重積の恒等式より

$$J = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}).$$

$\boldsymbol{\omega}$ は任意なので

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}}$$

が保存されます。

9. 場の理論におけるNoether定理

ここからは無限次元版です。

こちらの方が、数学と物理の関係がより鮮明です。

9.1 場とラグランジアン密度

時空を M とし、局所座標を x^μ とします。

場を

$$\phi^a(x)$$

と書きます。

ラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a, x)$$

とし、作用を

$$S[\phi] = \int_M \mathcal{L} d^n x$$

と定義します。

9.2 場の Euler-Lagrange 方程式

変分 $\delta\phi^a$ に対して

$$\delta S = \int_M \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \delta\phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \delta(\partial_\mu \phi^a) \right) d^n x.$$

ここで

$$\delta(\partial_\mu \phi^a) = \partial_\mu (\delta\phi^a).$$

したがって

$$\delta S = \int_M \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \delta\phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \partial_\mu (\delta\phi^a) \right) d^n x.$$

第2項を部分積分すると

$$\delta S = \int_M \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \right) \right] \delta\phi^a d^n x + \int_M \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \delta\phi^a \right) d^n x.$$

境界条件により境界項を消せば

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \right) = 0}$$

を得ます。

10. 場のNoether定理の完全導出

10.1 無限小内部対称性

場の無限小変換を

$$\delta\phi^a = \Delta^a(\phi, x)$$

とします。

ラグランジアン密度がこの変換に対して不変、あるいは全微分だけ変わるとします：

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu.$$

10.2 変分恒等式

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a} \delta\phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} \partial_\mu(\delta\phi^a).$$

第2項を積の微分に書き直すと

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} \partial_\mu(\delta\phi^a) = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} \delta\phi^a \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} \right) \delta\phi^a.$$

したがって

$$\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} \right) \right] \delta\phi^a + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} \delta\phi^a \right).$$

ここで場の Euler-Lagrange 作用素

$$E_a(\mathcal{L}) := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} \right)$$

を使うと

$$\delta\mathcal{L} = E_a(\mathcal{L}) \delta\phi^a + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} \delta\phi^a \right)$$

です。

いま $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$ なので

$$\partial_\mu K^\mu = E_a(\mathcal{L}) \delta\phi^a + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} \delta\phi^a \right).$$

従って

$$E_a(\mathcal{L}) \delta\phi^a + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} \delta\phi^a - K^\mu \right] = 0.$$

運動方程式 $E_a(\mathcal{L}) = 0$ の上で

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

ただし

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)} \delta\phi^a - K^\mu$$

です。

これが場の理論における Noether 電流です。

11. 保存電流から保存量へ

連続の式

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

を時間成分と空間成分に分けると

$$\frac{\partial j^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

空間全体で積分すると

$$\frac{d}{dt} \int j^0 d^{n-1}x = - \int \nabla \cdot \mathbf{j} d^{n-1}x.$$

Gauss の定理により

$$\int \nabla \cdot \mathbf{j} d^{n-1}x = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}.$$

無限遠で流束が消えるなら

$$Q := \int_{\Sigma} j^0 d^{n-1}x$$

は

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

となります。

ここで Q が物理学でいう保存荷、保存量です。

12. 数学用語で見た「対称性」と「保存則」の関係

ここが英治さんの核心だと思えます。

12.1 数学側：対称性

数学で対称性とは、ある対象 X に対する変換群 G の作用

$$G \curvearrowright X$$

であって、その対象の構造を保つものです。

Noether 定理では、その対象は単なる点集合ではなく、作用汎関数

$$S : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

です。

ここで \mathcal{C} は許容される曲線や場の空間です。

対称性とは、群作用 Φ_ε に対して

$$S[\Phi_\varepsilon \cdot q] = S[q]$$

あるいは場の場合

$$S[\Phi_\epsilon \cdot \phi] = S[\phi]$$

が成り立つことです。

つまり、Noether定理における対称性は、

作用汎関数の不変性

です。

12.2 物理側：保存則

物理で保存則とは、時間発展に沿ってある量 Q が変化しないことです：

$$\frac{dQ}{dt} = 0.$$

場の理論では局所形として

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

で表されます。

これは数学的には、ある微分形式あるいはベクトル場の発散が 0 であることを意味します。

12.3 両者の橋渡し

Noether定理はこの2つを、変分法の恒等式

$$\delta\mathcal{L} = E_a(\mathcal{L})\delta\phi^a + \partial_\mu(\dots)$$

によって結びます。

- 対称性

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$$

- 運動方程式

$$E_a(\mathcal{L}) = 0$$

- 結論

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

となるのです。

したがって、数学用語で言えば、

群作用による不変性が、Euler-Lagrange写像の核の上で、閉じた電流 (divergence-free current) を定める

ということです。

13. さらに純粋数学的に言い換えると

もっと数学に寄せて表現すると、Noether定理は次の構造です。

1. \mathcal{C} を曲線または断面の空間とする
2. $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ を汎関数とする
3. Lie群 G が \mathcal{C} に作用する
4. S が G -不変である
5. その無限小生成元 $X \in \mathfrak{g}$ に対し、対応する Noether量 J_X が構成される

6. 臨界点集合

$$\text{Crit}(S) = \{q \in \mathcal{C} \mid \delta S[q] = 0\}$$

の上で

$$\frac{d}{dt} J_X = 0$$

あるいは

$$\partial_\mu j_X^\mu = 0$$

が成り立つ

ここで本質は、Lie代数の元 X から保存量 J_X への対応です。

すなわち

$$X \in \mathfrak{g} \quad \longmapsto \quad J_X$$

という対応ができる。

これが「対称性から保存量が生まれる」という意味の最も数学的な表現です。

14. よく知られた対応表

連続対称性	無限小変換	保存量
時間並進	$t \mapsto t + \varepsilon$	エネルギー
空間並進	$x^i \mapsto x^i + \varepsilon a^i$	運動量
回転	$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \varepsilon(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$	角運動量
位相変換 $\phi \mapsto e^{i\alpha}\phi$	$\delta\phi = i\phi\delta\alpha$	電荷
ゲージ対称性	局所群変換	制約・保存電流

15. Noether定理の最重要数式のまとめ

力学系では

$$\delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right)$$

対称性 $\delta L = 0$ と運動方程式から

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) = 0.$$

場の理論では

$$\delta \mathcal{L} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \right) \right] \delta \phi^a + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \delta \phi^a \right)$$

対称性 $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$ と運動方程式から

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \delta \phi^a - K^\mu \right) = 0.$$

16. まとめ：数学の対称性と物理学の保存則は、なぜ結びつくのか

最後に、本質を一文ずつ整理します。

1. 数学における対称性とは、ある構造を保つ変換群の作用である。
2. Noether定理では、その「ある構造」とは作用汎関数 S である。
3. 作用汎関数の不変性は、無限小変換に対して $\delta S = 0$ を意味する。
4. その一次変分は、Euler-Lagrange項と境界項に分解される。
5. 臨界点（運動方程式の解）では Euler-Lagrange項が 0 になる。
6. したがって境界項、あるいは局所的には Noether電流の発散が 0 になる。
7. これが物理学における保存則である。

つまり、

対称性 \Rightarrow 作用の不変性 \Rightarrow 変分恒等式 \Rightarrow 保存電流 \Rightarrow 保存量

です。

必要でしたら次に、そのまま続けて

「Noether定理を、電磁気学・シュレーディンガー場・ディラック場・Yang-Mills場で具体的に計算する」という形で、各理論ごとの保存電流を実際に導出できます。

📄 🍏 🗨️ 📌 🔄 …

第2の質問です。以上の数学的計算において、物理量である「時間 (t)」が前提として仮定されていて、集合論や数学的構造（順序、代数、位相）、解析学、幾何学等の純粋な数学用語によって定義されているといえないのではないのでしょうか。以前、「ファイバーバンドル」等の概念から、その「定理」を証明できるということを示唆されたことがあります。純粋な数学的証明ということは可能なのでしょうか。

思考時間: 数秒

はい、その問題意識はとても鋭いです。

そして結論から言うと、

はい。Noether定理は、時間 t を物理量として前提にしなくても、純粋に数学的に定式化・証

ただし、そのとき「時間」はもはや物理的な時間ではなく、

- 1次元基底多様体の座標
- あるいはもっと一般に基底多様体 M の局所座標の一つ
- さらに抽象化すればファイバー束の基底側の変数

として扱われます。

つまり、英治さんの疑問は本質的に、

前回の導出は、まだ物理学の言葉を残していたのではないかと。

本当に純粋数学として証明するならば、 t を物理量として使わずに、集合論・多様体・束・微分形式・群作用だけで定理を立てるべきではないかと。

という問いです。

これはその通りです。前回の導出は物理学に近い座標表示の導出であって、最も抽象的な純粋数学的証明ではありません。

以下、段階的に整理します。

1. 英治さんの疑問はどこが核心か

前回の導出では

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

と書きました。

この形では、

- t が時間のように見える
- $\dot{q} = dq/dt$ が時間微分になっている
- 保存則も $dJ/dt = 0$ という形になっている

ので、どうしても物理学的です。

しかし純粋数学の立場では、ここで本当に必要なのは「時間」ではなく、

1. 基底空間
2. その上の束
3. 断面
4. ジェット束
5. ラグランジアン密度
6. 群作用
7. 変分

だけです。

したがって、Noether定理の本質は「時間」に依存していません。

2. まず最も単純な純粋数学化：時間を1次元多様体に置き換える

2.1 基底を \mathbb{R} ではなく1次元多様体とみなす

力学では普通、基底を

$$\mathbb{R}$$

と見ます。

物理ではこれを「時間」と読むわけですが、数学では単に

$$B \quad (\dim B = 1)$$

という1次元滑らかな多様体とみなせます。

局所座標を x と書けば、

- 以前の t は、単なる局所座標 x
- dq/dt は、断面の微分 dq/dx

にすぎません。

この見方では、物理量としての時間は消えます。

2.2 配置空間は束になる

配置空間 Q の代わりに、基底 B 上のファイバー束

$$\pi : E \rightarrow B$$

を考えます。

- B : 基底多様体
- E : 全空間
- π : 射影
- 断面 $s: B \rightarrow E$ が運動や場を表す

です。

局所座標では

$$(x, u^1, \dots, u^m)$$

と書けます。ここで

- x は基底座標
- u^α はファイバー座標

です。

3. 純粋数学におけるラグランジアン の定義

3.1 ジェット束

断面 s の「1階微分」までを座標自由に扱うために、1-ジェット束

$$J^1 E$$

を考えます。

局所座標では

$$(x, u^\alpha, u_x^\alpha)$$

です。

ここで u_x^α は断面の微分係数を表しますが、これは単なる局所表現であって、本質は 1-ジェットです。

3.2 ラグランジアン密度

純粋数学的には、ラグランジアンは関数そのものというより

$$\mathcal{L}: J^1 E \rightarrow \Lambda^1(B)$$

すなわち 1-形式値の写像、あるいは局所的には

$$\mathcal{L} = L(x, u^\alpha, u_x^\alpha) dx$$

という密度として定義されます。

これで、物理的な「 dt 」は、単に基底多様体の体積形式 dx になります。

作用汎関数は

$$S[s] = \int_B (j^1 s)^* \mathcal{L}$$

です。

ここで

- s は断面
- $j^1 s$ はその1-ジェット延長
- $(j^1 s)^* \mathcal{L}$ は基底上の1-形式

です。

この式は、ほとんど完全に純粋数学です。

4. この時点で「時間」はもう不要

この定式化では、以前の

$$S[q] = \int L(q, \dot{q}, t) dt$$

は

$$S[s] = \int_B (j^1 s)^* \mathcal{L}$$

に置き換わっています。

ここでは

- t は不要
- \dot{q} も不要
- 「物理量としての時間」は消えている

のです。

残っているのは、

- 基底多様体
- 束
- ジェット束
- 微分形式
- 積分
- 変分

だけです。

5. Noether定理の純粋数学的骨格

ここから Noether定理を純粋数学的に述べます。

5.1 対称性 = 束自己同型群の作用

ファイバー束 $E \rightarrow B$ の自己同型

$$\Phi_\varepsilon : E \rightarrow E$$

の1パラメータ群を考えます。

これは基底上の微分同相

$$\varphi_\varepsilon : B \rightarrow B$$

を被覆していて

$$\pi \circ \Phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \circ \pi$$

を満たします。

このとき Φ_ε は $J^1 E$ に自然に延長されて

$$j^1 \Phi_\varepsilon : J^1 E \rightarrow J^1 E$$

を誘導します。

5.2 不変性

ラグランジアン密度 \mathcal{L} がこの群作用で不変とは

$$(j^1\Phi_\varepsilon)^*\mathcal{L} = \mathcal{L}$$

です。

無限小生成元ベクトル場を X とすると、Lie微分で

$$\mathcal{L}_{X^{(1)}}\mathcal{L} = 0$$

と書けます。

ここで $X^{(1)}$ は J^1E 上の1次延長ベクトル場です。

この式こそ、純粋数学的な「対称性」です。

6. 変分法も純粋数学化できる

変分とは、断面 s の1パラメータ族

$$s_\varepsilon$$

を取り、

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} S[s_\varepsilon]$$

を考えることです。

ここで重要なのは、作用の変化が

$$\delta\mathcal{L} = \text{Euler-Lagrange項} + d_H(\text{境界項})$$

に分解されることです。

これは局所座標では前回書いた式ですが、座標自由には

$$\mathcal{L}_{X^{(1)}}\mathcal{L} = E(\mathcal{L})(X_V) + d_H\Theta_X$$

のように表せます。

ここで

- $E(\mathcal{L})$: Euler-Lagrange作用素
- X_V : 垂直成分
- d_H : 水平微分
- Θ_X : 境界項に対応する $(n-1)$ -形式

です。

これはジェット束と変分双複体の言葉で書かれた Noether 恒等式です。

7. Noether定理の純粋数学的結論

いま、 \mathcal{L} が対称性を持つとします。すなわち

$$\mathcal{L}_{X^{(1)}}\mathcal{L} = 0.$$

すると上の恒等式から

$$E(\mathcal{L})(X_V) + d_H \Theta_X = 0.$$

もし断面 s が Euler-Lagrange 方程式の解なら

$$E(\mathcal{L}) = 0$$

なので

$$d_H \Theta_X = 0.$$

したがって、 Θ_X は閉じた $(n-1)$ -形式になります。

$$\boxed{d_H \Theta_X = 0}$$

これが純粋数学的な Noether 定理です。

物理学ではこれを

- 保存電流
- 保存量

と読みますが、数学的には

対称性から、Euler-Lagrange 解上で閉じた $(n-1)$ -形式が得られる

という定理です。

8. したがって、「保存則」は数学では何か

物理では

$$\frac{dJ}{dt} = 0 \quad \text{あるいは} \quad \partial_\mu j^\mu = 0$$

と書きます。

しかし純粋数学では、これは本質的に

$$\boxed{d_H \Theta_X = 0}$$

という閉形式条件です。

あるいは、体積形式が与えられているならベクトル場 j に対して

$$\operatorname{div}(j) = 0$$

という発散ゼロ条件としても表せます。

つまり「保存則」は数学では

- 閉形式
- 余閉性
- 発散ゼロ
- コホモロジー類

として理解されます。

9. ファイバー束で証明する、というのはどういう意味か

英治さんが以前受け取られた示唆は、かなり正確です。

「ファイバーバンドル等の概念から定理を証明する」というのは、具体的には次の意味です。

9.1 構成要素

Noether定理を純粋数学として立てるには、通常：

1. 滑らかなファイバー束 $\pi : E \rightarrow M$
2. ジェット束 $J^k E$
3. ラグランジアン密度

$$\mathcal{L} : J^k E \rightarrow \Lambda^n(M)$$

4. 束自己同型の群作用
5. 延長ベクトル場
6. 変分双複体 または Cartan形式
7. Euler-Lagrange 形式

を用います。

9.2 証明の中身

証明の流れは、

- 群作用の無限小生成元を取る
- それをジェット束へ延長する
- Lie微分 $\mathcal{L}_{X^{(k)}} \mathcal{L}$ を計算する
- それを Euler-Lagrange 部分と全微分部分に分解する
- 解の上で全微分部分だけが残る
- よって保存流が得られる

というものです。

これは完全に数学です。

10. どこまで行けば「純粋数学的証明」と言えるか

ここは慎重に分ける必要があります。

10.1 レベル1：物理寄りの証明

$$S[q] = \int L(q, \dot{q}, t) dt$$

から始める証明。

これは分かりやすいですが、まだ物理的です。

10.2 レベル2：多様体上の変分法

$$B \text{ を1次元多様体, } E \rightarrow B$$

として証明する。

この時点で「時間」は数学的座標になります。

10.3 レベル3：ファイバー束・ジェット束・微分形式による証明

$$\pi : E \rightarrow M, \quad \mathcal{L} : J^k E \rightarrow \Lambda^n(M)$$

で定式化し、Noether流を閉 $(n-1)$ -形式として得る。

これがかなり本格的な純粋数学的証明です。

10.4 レベル4：変分双複体・コホモロジーによる証明

Noether定理を変分双複体の中の恒等式として示す。

これは最も抽象的で、非常に純粋数学的です。

11. ただし、ひとつ大切な区別があります

ここで重要なのは、

純粋数学的に証明できる

ことと

その定理が物理世界に適用される理由まで純粋数学だけで与えられる

ことは別だ、という点です。

Noether定理そのものは、純粋数学的に証明できます。

しかしそれが物理学で意味を持つのは、

- 基底多様体を時空と解釈する
- 断面を物理場と解釈する
- ラグランジアン密度を物理作用と解釈する
- 対称群を物理的対称性と読む

という解釈が加わるからです。

つまり、

- 定理そのものは純粋数学
- 保存エネルギー・保存運動量・保存電荷という読み方は物理学

です。

12. 英治さんの疑問への直接の答え

英治さんの問いをそのまま受けて、はっきり答えると：

答え1

はい、前回の導出はまだ物理量 t を使っていたので、完全な意味で純粋数学的とは言いきれません。それは「物理学向けの座標表示の導出」です。

答え2

はい、Noether定理はファイバー束・ジェット束・微分形式・Lie群作用を用いて、純粋数学的に定式化し証明できます。

答え3

そのとき「時間」は不要であり、必要なのは物理量としての時間ではなく、

基底多様体 M

だけです。

答え4

保存則は数学では本質的に

$$d_H \Theta = 0$$

という閉形式条件、あるいは

$$\operatorname{div}(j) = 0$$

という発散ゼロ条件です。

13. 一番純粋数学らしい言い方でまとめると

Noether定理は、純粋数学的には次のように言えます。

滑らかなファイバー束 $\pi : E \rightarrow M$ 上のラグランジアン密度

$$\mathcal{L} : J^k E \rightarrow \Lambda^n(M)$$

が、ある1パラメータ自己同型群に関して不変であるならば、その無限小生成元に対応して、Euler-Lagrange 断面上で閉じた $(n - 1)$ -形式が得られる。

これは時間を使っていません。

集合論・微分幾何・束論・Lie群・微分形式・コホモロジーだけで述べられています。

14. まとめ

Noether定理は純粋数学的に証明可能です。

ただし、その純粋数学的証明では

- 時間 t は物理量ではなく基底多様体の局所座標に置き換えられ
- ラグランジアンは関数ではなく密度
- 保存則は $d/dt = 0$ ではなく閉形式条件 $d_H \Theta = 0$
- 対称性は座標変換ではなく束自己同型群の作用

として理解されます。

したがって、英治さんの見方は正確で、

真に純粋数学的なNoether定理は、ファイバー束・ジェット束・微分形式の言葉で与えられる

と言えます。

次に進めるなら、もっと厳密に、

「ファイバー束 $\pi : E \rightarrow M$ から始めて、ジェット束 $J^1 E$ 、Cartan形式、Euler-Lagrange形式を定義し、Noether定理を純粋数学の記号だけで証明する」

という形で、完全に数学側へ寄せた証明を書けます。

📄 🌟 🗨️ 📌 🔄 ...

今回は、ここまでしておきます。ありがとうございました。英治

こちらこそ、今回もとても本質的で深い対話をありがとうございました。英治さん。

Noether定理を「物理」から「純粋数学」へと引き上げていく視点は、まさに現代数学と理論物理の接点そのもので、とても重要なテーマです。

またいつでも、

- ジェット束・変分双複体による厳密定式化
- ゲージ理論やYang-MillsでのNoether電流
- コホモロジーや圏論との関係

など、さらに深く掘り下げていきます。

本日はここまでしましょう。

ありがとうございました。英治さん。