

数と量

北島英治（2025年12月）

物理学と数学の関連を理解するために、数学の「数」と物理学の「量」の関連についての理解を深めたい。まず、「集合論（Set Theory）」における用語である「集合」「要素（元）」「関係」「写像（関数）」を説明し定義してください。そして、その「集合」としての「部分集合」「合併集合」「空集合」「無限集合」、「関係」としての「同値関係（「反射律」「対称律」「推移律）」」「順序関係」、「写像」としての「像」「原像」「逆写像」について、「集合論の記号」を用いて、段階的に説明してください。英治

ではさっそく、集合論の言葉でゆっくり整理していきますね。

今日はまだ「数」と「量」に入る前段階として、「集合論の基礎語彙」をしっかり立てておきましょう。

1. 集合・要素・記号

(1) 集合と要素

- 集合（set）：

何らかの対象を「ひとかたまり」として扱ったもの。

集合 A に属する対象 a を 要素（元, element）と呼びます。

- 記号：

- 「 a は集合 A の要素である」：

$$a \in A$$

- 「 a は集合 A の要素でない」：

$$a \notin A$$

- 例：

$$A = \{1, 2, 3\}$$

このとき $1 \in A$, $4 \notin A$ となります。

2. 関係と写像（関数）の基本

(1) デカルト積

2つの集合 A, B に対して

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

をデカルト積といいます。
「順序対 (a, b) の集合」です。

(2) 関係 (relation)

- 集合 A 上の二項関係 R とは、

$$R \subseteq A \times A$$

という形の部分集合のことです。

- 「 a と b が関係 R を満たす」ことを

$$(a, b) \in R$$

と書き、またしばしば

$$a R b$$

とも書きます。

(3) 写像 (関数, function)

- 集合 A から集合 B への写像 f とは、

$$f: A \rightarrow B$$

で表され、各 $a \in A$ に対してただ1つの $b \in B$ を対応させるルールです。

(この b を $f(a)$ と書きます)

- 集合論的には、写像 f は

$$f \subseteq A \times B$$

という「グラフ」(順序対の集合)であり、

任意の $a \in A$ に対して「 $(a, b_1), (a, b_2) \in f$ ならば $b_1 = b_2$ 」という性質を持つ部分集合と考えることもできます。

3. 集合としての基本操作

(1) 部分集合

集合 A, B について、

- 「 A は B の部分集合」:

$$A \subseteq B$$

とは、

$$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

が成り立つことの意味です。

- 「真の部分集合」は

$$A \subsetneq B$$

と書き、 $A \subseteq B$ かつ $A \neq B$ を表します。

(2) 合併集合 (和集合)

集合 A, B の合併集合 (和集合, union) は

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

と定義されます。

(3) 積集合 (intersection) [補足]

よく一緒に使うので、ついでに:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

(4) 空集合

- 要素を一つも持たない集合を **空集合** と呼び、

$$\emptyset$$

または $\varnothing$ と書きます。

- 任意の集合 A について

$$\emptyset \subseteq A$$

が成り立ちます (どの要素も含まないので、「 $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ は自明に真」)。

(5) 無限集合

- 要素が「有限個でない」集合を **無限集合** と呼びます。

代表例：

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ など}$$

これらはすべて無限集合です。

集合論的には、「有限集合と同型ではない（有限個で番号付けできない）」ものとして特徴づけられます。

4. 関係の具体的な性質

(1) 同値関係 (equivalence relation)

集合 A 上の関係 $R \subseteq A \times A$ が **同値関係** であるとは、次の 3 つの性質を満たすときです。

1. 反射律 (reflexive)

$$\forall a \in A, (a, a) \in R$$

つまり

$$\forall a \in A, aRa$$

2. 対称律 (symmetric)

$$\forall a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

つまり

$$aRb \Rightarrow bRa$$

3. 推移律 (transitive)

$$\forall a, b, c \in A, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

つまり

$$aRb, bRc \Rightarrow aRc$$

このとき「 a は b と同値である」と書いて

$$a \sim b$$

のような記号を使うことも多いです（ $\sim$ は任意の同値関係の記号）。

(2) 順序関係 (order relation)

集合 A 上の関係 $\leq$ が (半) 順序関係 であるとは、ふつう次を満たすことです：

1. 反射律

$$\forall a \in A, a \leq a$$

2. 反対称律 (antisymmetric)

$$\forall a, b \in A, (a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$$

3. 推移律

$$\forall a, b, c \in A, (a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$$

このような構造 $(A, \leq)$ を「半順序集合 (poset)」と呼びます。

さらに、任意の異なる要素 $a, b \in A$ に対して

$$a \leq b \quad \text{または} \quad b \leq a$$

が成り立つとき、 $\leq$ は **全順序** (total order) と呼ばれます。

$(\mathbb{R}, \leq)$ は全順序の典型例です。

5. 写像に関する用語：像・原像・逆写像

写像 $f: A \rightarrow B$ を固定して説明します。

(1) 像 (image)

- 部分集合 $X \subseteq A$ に対して、**像** (image) $f(X)$ を

$$f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \} \subseteq B$$

と定義します。

- とくに、集合全体 A の像 $f(A)$ を **値域** と呼ぶこともあります（厳密には「像」と「値域」を区別する流派もありますが、ここでは「像」として理解しておけば十分です）。

(2) 原像 (preimage)

- 部分集合 $Y \subseteq B$ に対して、**原像 (preimage)** を

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \subseteq A$$

と定義します。

ここでの f^{-1} は「逆写像」ではなく、「原像を取る操作」という意味です。

(3) 逆写像 (inverse function)

- 写像 $f: A \rightarrow B$ が **全単射 (bijection)**、つまり

- 単射 (1対1) :

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

- 全射 (onto) :

$$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$$

を満たすとき、

B から A への写像 $f^{-1}: B \rightarrow A$ が定義できます。

- このとき、**逆写像 f^{-1}** は

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$$

を満たす唯一の写像です。

- つまり

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_A, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_B$$

となり、 id_A, id_B はそれぞれ恒等写像です。

ここまでの小まとめ

- 集合** : 対象の「ひとかたまり」で、要素との関係を $\subseteq$ で書く。
- 部分集合・合併・空集合・無限集合** :
 $\subseteq, \cup, \emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{R}$ など書き表す。
- 関係** : $R \subseteq A \times A$ という部分集合として理解し、
同値関係では「反射・対称・推移」の3条件、
順序関係では「反射・反対称・推移」を満たす。

- 写像（関数）：

$f: A \rightarrow B$ は A の各要素に B の1点を対応させるルール。

部分集合に対して 像 $f(X)$ 、原像 $f^{-1}(Y)$ を定義でき、

全単射ならば本当の意味での 逆写像 $f^{-1}: B \rightarrow A$ が存在する。

次のステップとして、これらの「集合」「写像」「関係」を土台にして、

- 数 (N, Z, Q, R など) を集合論でどう構成するか
- 物理の「量（長さ、時間、エネルギーなど）」を、集合と写像の言葉でどう表すか

をつなげていくと、「数学の数」と「物理の量」の関連が、かなりクリアに見えてきます。

もしよければ、次は

「集合論から見た『数』の定義」（自然数の構成など）から進めてみましょうか？

次に、「数」とは何かを定めて、その「数」における「整数」「有理数」「実数」「無理数」「複素数」、「その他の数」を説明し定義してください。そして、特に「実数」における「連続」「順序」、「加法（定理・公理）」としての「結合律」「交換律」「減法の可能性」「加法の単調性」、そして「アルキメデスの原理」について、数学記号を

では続けて、**「数とは何か」**を集合論の立場から定義し、
整数・有理数・実数・複素数などをすべて数学的に順序立てて説明し、
とくに **実数の性質（連続・順序・加法の公理・アルキメデスの原理）** を
数学記号を用いて厳密にまとめていきます。

1. 数とは何か（Set Theory による定義）

数学的には、**数（number）**とは「特定の構造を持つ集合」です。
直観的な「量・大きさ」から離れ、純粹に集合として構成します。

最も伝統的な方法は **フォン・ノイマンの自然数構成** です。

1.1 自然数 $\mathbb{N}$ の集合論的定義

- 0 を

$$0 := \emptyset$$

と定義する。

- 次に、各自然数 n から「次の数」 $n+1$ を

$$n+1 := n \cup \{n\}$$

で定義する。

すると具体的には：

$$0 = \emptyset$$

$$1 = 0 \cup \{0\} = \{\emptyset\}$$

$$2 = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

このように 自然数とは集合であり、順序が集合の包含関係で表される。

2. 整数・有理数・実数・複素数の定義

自然数 $\mathbb{N}$ を起点として、以下のように数体系を拡張する。

2.1 整数 $\mathbb{Z}$

自然数では減法が常にできない（例： $3 - 5$ が定義されていない）。

そこで整数を「差としての等価類」で構成する。

定義（集合の言葉）

整数とは、自然数の対 (a, b) の同値類：

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$$

この等価類を $[a, b]$ と書く。

直観的に「 $a - b$ を表す」と考える。

- 正の整数： $[n, 0]$
- 負の整数： $[0, n]$
- 0 ： $[0, 0]$

全体を

$\mathbb{Z}$

と定義する。

2.2 有理数 $\mathbb{Q}$

整数では割り算がいつでもできないので、比（ratio）を導入する。

定義

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc, \quad b, d \neq 0$$

この同値類を

$\frac{a}{b}$

と書き、これを 有理数 とする。

全体を

$\mathbb{Q}$

と定義する。

2.3 実数 $\mathbb{R}$

有理数だけでは「連続性 (continuity)」が不足する。

実数は以下のいずれかで構成される。

① デデキント切断 (Dedekind cut)

有理数の部分集合 $\alpha \subset \mathbb{Q}$ で次を満たすもの：

1. 空ではない
2. 真に有界 ($\alpha \subsetneq \mathbb{Q}$)
3. 下に開いている

$$q \in \alpha, r < q \Rightarrow r \in \alpha$$

4. 上限がない (最大元を持たない)

このような α の集合全体が実数 $\mathbb{R}$ 。

② コーシー列の同値類

有理数列 (q_n) がコーシー列であるという条件：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n, m > N \Rightarrow |q_n - q_m| < \varepsilon$$

この「極限に収束する」性質に基づいて実数を構成する方法。

2.4 無理数 (irrational number)

有理数で表せない実数：

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

例： $\sqrt{2}, \pi, e$

2.5 複素数 $\mathbb{C}$

実数で解けない方程式 (例： $x^2 + 1 = 0$) を解くために導入される。

定義

複素数は

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

として定義し、要素 (a, b) を

$$a + bi$$

と書く。ここで i は

$$i^2 = -1$$

を満たす抽象的記号。

3. 実数の性質（連続・順序・加法の公理・アルキメデスの原理）

ここからが本題です。

3.1 実数の 順序構造

実数には自然な「順序 $\leq$ 」があり、以下を満たす：

1. 反射律

$$a \leq a$$

2. 反対称律

$$(a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$$

3. 推移律

$$(a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$$

4. 全順序性

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \text{ または } b \leq a$$

3.2 実数の 連続性（Completeness）

実数の本質的な性質は「連続」であること。

完備性公理（最小上界性）

任意の 上に有界 な部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ は
上限 (supremum) を持つ :

$$\exists \sup A \in \mathbb{R}$$

これは有理数には成り立たない重要な特徴。

3.3 実数の加法に関する公理と性質

実数の加法 $+$ は以下の性質を持つ。

(1) 結合律 (associativity)

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

(2) 交換律 (commutativity)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a + b = b + a$$

(3) 単位元の存在

$$\exists 0 \in \mathbb{R} \quad \forall a, \quad a + 0 = a$$

(4) 逆元の存在 (= 減法が可能)

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \exists (-a) \text{ such that } a + (-a) = 0$$

結果として

$$a - b = a + (-b)$$

が常に定義できる。

(5) 加法の単調性 (monotonicity)

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \quad (\forall a, b, c \in \mathbb{R})$$

順序構造と加法が整合している。

3.4 アルキメデスの原理 (Archimedean property)

これは実数の最も重要な性質の一つ。

定義

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ such that } nx > y$$

言い換えると：

- どんなに大きな実数 y でも
十分大きな自然数 n を使えば
 nx で必ず越えられる。

特に $x = 1$ のとき：

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > y$$

これは「実数には無限大が存在しない」ことを意味する。

4. 「数体系の階層」のまとめ図

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

さらにその外側に：

- 超実数 (hyperreal numbers)
- 超複素数
- p -進数 $\mathbb{Q}_p$
- 四元数 $\mathbb{H}$
- 八元数 $\mathbb{O}$

などさまざまな数体系が存在する。

5. 小まとめ

- 数は集合論から「構造をもつ集合」として構成できる。
- 整数は「差の等価類」、有理数は「比の等価類」、実数は「連続性」を満たすように構成される。
- 実数の本質は **連続性 (完備性)** と **順序** にある。

- 加法には結合律・交換律・単位元・逆元・単調性がある。
- アルキメデスの原理は「実数は無限大を含まない」ことを表す重要な性質。

次のステップとして、

「数（数学）」と「量（物理）」の関係

を、集合論の上でどのようにつなぐか——
たとえば、

- 物理量 = 実数への写像（測定の数学モデル）
- 単位系 = 実数の「スケール変換群」
- 連続量と離散量の違い = 実数と整数の違い

などを説明できます。

次はこの方向へ進めますか？

次に、物理学における「量」とは何かを、数学用語を用いて説明し定義してください。そして、その「量」としての「外延量」「内包量」を、段階的に説明し定義し、その具体的種類と単位名を示して、その最後に比較表を作成してください。

思考時間: ... >

では、いよいよ「量とは何か」を数学の言葉で整理していきましょう。

ここでのポイントは：

- 「量＝数そのもの」ではなく
- 「物理状態 → 数（＋単位）への写像」として理解すること

その上で「外延量」「内包量」を定義していきます。

1. 物理学における「量」の数学的定義

(1) 物理状態の集合

まず、考えたい物理システムの「状態」の集合を

S

とします。

例：ある気体の状態、剛体の状態、電磁場の状態など。

(2) 物理量を「写像」として定義

物理量（physical quantity） Q とは、

$$Q: S \rightarrow V$$

という**写像（関数）**として定義できます。

- S ：物理状態の集合
- V ：値のとり集合（多くは R や R^n ）

実際には、「単位」と「次元」を持つので、より丁寧には

$$V \cong R \times U$$

のように、「数値部分」 $\in R$ と「単位」 U の組として考えることが多いです。

(3) 例

- 長さ $L : S \rightarrow R$ (単位 m)
- 質量 $M : S \rightarrow R$ (単位 kg)
- 温度 $T : S \rightarrow R$ (単位 K)
- 電場 $\mathbf{E} : S \rightarrow R^3$ (ベクトル量)

2. 系の「和」と「スケーリング」の構造

「外延量」と「内包量」は、「系を足し合わせる」「スケールを変える」という操作で分類できます。

- 系の和 (結合) :

$$\oplus : S \times S \rightarrow S, \quad (S_1, S_2) \mapsto S_1 \oplus S_2$$

(例: 2つの物体を合わせて1つの系とみなす)

- 系のスケーリング :

$$\lambda \cdot S \in S, \quad \lambda > 0$$

(例: 同じ性質を持つ物質を λ 倍に増やす)

このとき、物理量 Q が

- 和に対してどう振る舞うか
- スケールに対してどう振る舞うか

で、外延量 (extensive) と 内包量 (intensive) を区別します。

3. 外延量 (Extensive quantity) の定義

(1) 定義 (加法性)

物理量 Q が 外延量 (外延的量) であるとは、

$$Q(S_1 \oplus S_2) = Q(S_1) + Q(S_2)$$

が成り立つときです (系が「互いに独立で重ならない」と仮定)。

(2) スケーリング性

さらに、スケーリングに対して

$$Q(\lambda \cdot S) = \lambda Q(S) \quad (\lambda > 0)$$

が成り立つとき、外延量として典型的です。

→「系の大きさ（量）」に比例します。

(3) 外延量の代表例と単位

1. 質量 M

$$M(S_1 \oplus S_2) = M(S_1) + M(S_2), \quad [M] = \text{kg}$$

2. 体積 V

$$V(S_1 \oplus S_2) = V(S_1) + V(S_2), \quad [V] = \text{m}^3$$

3. エネルギー E （多くの場合）

$$E(S_1 \oplus S_2) = E(S_1) + E(S_2), \quad [E] = \text{J}$$

4. 運動量 p

$$p(S_1 \oplus S_2) = p(S_1) + p(S_2), \quad [p] = \text{kg m/s}$$

5. 電荷 Q_e

$$Q_e(S_1 \oplus S_2) = Q_e(S_1) + Q_e(S_2), \quad [Q_e] = \text{C}$$

6. エントロピー S （熱力学）

$$S(S_1 \oplus S_2) = S(S_1) + S(S_2), \quad [S] = \text{J/K}$$

いずれも「系を2倍にしたら値も2倍になる」という性質を持ちます。

4. 内包量（Intensive quantity）の定義

(1) 定義（大きさに依存しない）

物理量 Q が内包量（内包的量）であるとは、
系の大きさを変えても変化しない、という性質を持つ量です。

数学的にはおおよそ、

$$Q(\lambda \cdot S) = Q(S) \quad (\lambda > 0)$$

のように、「スケール変換に対して不変」とみなせます。

(2) 平衡状態における性質

熱力学では、2つの系 S_1, S_2 が平衡で結合しているとき、
内包量 Q は

$$Q(S_1 \oplus S_2) = Q(S_1) = Q(S_2)$$

となることが多いです（例：温度、圧力、化学ポテンシャル）。

(3) 内包量の代表例と単位

1. 温度 T

$$T(\lambda \cdot S) = T(S), \quad [T] = \text{K}$$

2. 圧力 P

$$P(\lambda \cdot S) = P(S), \quad [P] = \text{Pa} = \text{N/m}^2$$

3. 密度 ρ

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad [\rho] = \text{kg/m}^3$$

系全体を2倍にしても、 ρ は変わらない。

4. 比熱容量 c

$$c = \frac{1}{M} \frac{dQ}{dT}, \quad [c] = \text{J}/(\text{kg K})$$

5. 電場の強さ E

$$[E] = \text{V/m}$$

空間のある点での「場の値」であり、系の大きさで直接伸び縮みしない。

6. 電位（ポテンシャル） ϕ

$$[\phi] = \text{V}$$

これらは「局所的な状態」を表し、系の「量」ではなく「性質」を表すと考えられます。

5. 外延量と内包量の関係（比・密度）

多くの場合、**内包量 = 外延量 ÷ 外延量** の形で表されます。

例：

- 密度

$$\rho = \frac{M}{V}$$

（質量という外延量／体積という外延量）

- 比エネルギー

$$e = \frac{E}{M}$$

- 比エントロピー

$$s = \frac{S}{M}$$

こうした「比で定義される量」は、系を2倍にしても変わらないので「内包量」になります。

6. 比較表：外延量 vs 内包量

最後に、数学的性質と具体例をまとめた比較表です。

項目	外延量 (Extensive)	内包量 (Intensive)
定義 (系の和)	$Q(S_1 \oplus S_2) = Q(S_1) + Q(S_2)$	$Q(S_1 \oplus S_2)$ は一般に加法的でない (平衡状態では $Q(S_1 \oplus S_2) = Q(S_1) = Q(S_2)$ のことが多い)
定義 (スケーリング)	$Q(\lambda \cdot S) = \lambda Q(S)$	$Q(\lambda \cdot S) = Q(S)$
幾何学的イメージ	「量 (かさ・総量)」に比例	「局所的な性質・密度・強さ」を表す
代表的物理量	質量 M 、体積 V 、エネルギー E 、エントロピー S 、電荷 Q_e 、運動量 $\mathbf{p}$	温度 T 、圧力 P 、密度 ρ 、比熱 c 、電場 $\mathbf{E}$ 、ポテンシャル ϕ
SI 単位の例	$M : \text{kg}, V : \text{m}^3, E : \text{J}, S : \text{J/K}, Q_e : \text{C}$	$(T: \mathrm{K}, P: \mathrm{Pa}, \rho: \mathrm{kg/m}^3, c: \mathrm{J/(kg,K)})$
系を2倍にしたとき	値も2倍になる	値は変わらない
数学的性質	加法性・スケーリングに対する線形性	比として表現されることが多い (外延量 ÷ 外延量)

ここまでで、

- 数学的には：
物理量 = 物理状態の集合 S から実数 (+ 単位) への写像
- 物理的には：
「外延量」= 集合 (系) の大きさに比例する量

「内包量」= 集合の大きさに依存しない、その性質を表す量
という整理ができました。

この先は、もしよければ：

- 「量 = 写像」としての考え方を、
計量空間・測度空間 (metric / measure) などの数学的構造と結びつける
- あるいは、ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ から出てくるエネルギー・運動量・電荷が、「外延量としての保存量」になる様子を見ていく

と、「数」「量」「保存則」「場」が一本の線でつながっていきます。

次に、以上示された2「数」と「量」の関連について、集合論と数学用語を用いて、段階的に説明することができますか。できれば、それをまとめて表を作成してください。そして、その「量」について「圏論」と「表現論」を用いて説明すると、どのようになりますか。

思考時間: ... >

いきなり結論から言うと：

- 「数」＝純粋に数学的な構造（集合と演算）
- 「量」＝物理状態の集合から「数」への写像（+ 単位・次元）

として整理すると、とてもきれいに繋がります。

そのうえで「圏論」「表現論」で見ると：

- 量＝圏の射（あるいは関手・自然変換）
- 量の変換性＝対称性群の表現と同変写像（equivariant map）

として書けます。

順番に、できるだけ集合論→圏論→表現論の流れで整理してみます。

1. 集合論で見る「数」と「量」の関係

1.1 「数」の側：構造をもった集合

前回まででやった通り、数は大雑把に言えば

- 自然数： $\mathbb{N}$
- 整数： $\mathbb{Z}$
- 有理数： $\mathbb{Q}$
- 実数： $\mathbb{R}$
- 複素数： $\mathbb{C}$

などのように、

ある特定の演算と公理を満たす「集合」

として定義されます。

例： $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ は

「順序付き体」であり、完備性公理を満たす、という形で純粋に数学的に特徴づけられます。

1.2 「物理状態の集合」と「量としての写像」

物理の側では、ある理論で扱う「状態 (state)」の集合を

$$S$$

と書きます。たとえば：

- 1個の質点の状態：位置・速度を含む状態空間 $S \cong \mathbb{R}^6$
- 熱力学系：圧力・体積・温度などを含む状態集合
- 電磁場：時空上の場の構成の集合

ここで、物理量 Q を

$$Q: S \rightarrow V$$

という写像 (関数) として定義します。

- S ：系の状態の集合
- V ：数値が入っている集合 (通常は $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$ に「単位」を付けたもの)

つまり、

量 = 「状態」から「数 (+ 単位)」への写像

と見なせます。

1.3 単位と次元を入れた書き方 (少しだけ)

「単位」を意識すると、値の集合は

$$V \cong \mathbb{R} \times U$$

のように、「実数の値」と「単位 (dimension)」の組と考えられます。

- 例えば、長さの量 L は

$$L: S \rightarrow \mathbb{R} \times \{\text{m}\}$$

- 質量なら

$$M: S \rightarrow \mathbb{R} \times \{\text{kg}\}$$

このようにして、「数の構造」と「物理的な次元・単位」が組になって、1つの「量」の値になります。

1.4 外延量・内包量の写像としての性質

前の回で定義したように、系の「和」 $\oplus$ やスケーリング $\lambda \cdot S$ を入れておくと：

- 外延量 Q_{ext} ：

$$Q_{\text{ext}}(S_1 \oplus S_2) = Q_{\text{ext}}(S_1) + Q_{\text{ext}}(S_2)$$

$$Q_{\text{ext}}(\lambda \cdot S) = \lambda Q_{\text{ext}}(S)$$

- 内包量 Q_{int} :

$$Q_{\text{int}}(\lambda \cdot S) = Q_{\text{int}}(S)$$

といった 写像の「線形性」や「不変性」の性質として表現できます。

ここでも、結局は「量 = 写像 Q がどういう条件を満たすか」で特徴づけられています。

2. 「数」と「量」の関係のまとめ表（集合論的）

集合論・写像の言葉だけで、両者を並べるとこんな感じになります。

観点	「数」	「量」
基本対象	集合 $N, Z, Q, R, C, \dots$	状態集合 S から値集合 V への写像 $Q : S \rightarrow V$
構造	加法・乗法・順序などの演算と公理	系の和 $\oplus$ 、スケーリング $\lambda \cdot S$ 、それに対する Q の振る舞い
存在理由	純粋に数学的（集合 + 構造）として構成できる対象	物理的状态を「数値化」して扱うための道具
表現	$x \in R, z \in C$	$Q(S) \in V$ (例 : $L(S) = 2.0 \text{ m}$)
集合論的記述	数は「構造付き集合の要素」	量は「写像 $Q : S \rightarrow V$ 」としての集合論的对象
外延／内包	(直接は区別しない)	$Q(\lambda S) = \lambda Q(S)$ (外延) , $Q(\lambda S) = Q(S)$ (内包)
数との結びつき	N, Z, Q, R などの数体系	値集合 V の中身として「数体系」が使われる (例 : R や R^n)

つまり :

- 数 : 純粋数学の内部に閉じた構造
- 量 : 物理世界を数へ写像する構造 ($S \rightarrow R^n$)

という関係です。

3. 圏論から見た「量」

ここから、Eijiさんが好きな「圏論」と「表現論」の視点に入っていきます。

3.1 まず圏の枠組み

- **Set** : 集合と写像の圏
 - 対象 (object) = 集合

- 射 (arrow, morphism) = 写像

物理理論を、抽象的に

- **Phys** : 物理系とその間の「物理的に意味のある写像 (時間発展、部分系への射、対称変換など)」を集めた圏

と考えます。

- 対象 : 物理系 S
- 射 : 物理的な写像 $f: S \rightarrow S'$ (例 : 時間発展、座標変換、部分系の包含など)

3.2 「量 = 圏の射」としての見方

個々の系 S に対する量 Q は、
圏論の言葉で言うと

$$Q_S: S \rightarrow V$$

という圏 **Phys** から **Set** の中の射 とみなせます。

- 対象 $S \in \mathbf{Phys}$
- 値空間 $V \in \mathbf{Set}$
- 量 Q_S は、**Phys** 中の状態集合から **Set** の値集合への写像 (ただし、ここでは物理系の状態集合と集合としてみなしたものを同一視しています)

より「圏論らしく」言うには、次の2つのレベルがあります。

3.3 レベル1 : 量を「関手」として見る

各系 S について「その系で測れる値の集合」 $Q(S)$ を割り当てると考え、

$$Q: \mathbf{Phys} \rightarrow \mathbf{Set}$$

という関手 (functor) として表現できます。

- 各対象 S に対して : 値集合 $Q(S)$
- 各射 $f: S \rightarrow S'$ に対して :
値の変換 $Q(f): Q(S) \rightarrow Q(S')$
(例 : 座標変換、基準系の変換、スケール変換に応じて値がどう変わるか)

関手条件 :

1. 恒等射の保存

$$Q(\text{id}_S) = \text{id}_{Q(S)}$$

2. 合成の保存

$$Q(f \circ g) = Q(f) \circ Q(g)$$

これにより、「量」が物理操作の合成と整合的に変換されることが圏論的に表現できます。

3.4 レベル2：量を「自然変換」として見る

さらに、系の「状態空間」を与える関手

$$X : \mathbf{Phys} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad S \mapsto X(S) = \text{状態集合}$$

があるとしましょう。

すると、物理量 Q は、

$$Q_S : X(S) \rightarrow V$$

という写像の族 $\{Q_S\}$ になります。

もし射 $f : S \rightarrow S'$ に対して、「状態の写像」 $X(f) : X(S) \rightarrow X(S')$ と、「値の写像」 $V(f) : V \rightarrow V$ （座標変換など）があり、

$$V(f) \circ Q_S = Q_{S'} \circ X(f)$$

が成り立つなら、これは **自然変換**

$$Q : X \Rightarrow V$$

とみなせます（ここでは単純化して説明しています）。

この図式：

$$X(S) \xrightarrow{X(f)} X(S') \quad \Bigg| \quad Q_S \quad Q_{S'} \quad V \quad V \xrightarrow{V(f)} V$$

が可換になる、というのが「自然性」です。

直感的には：

「状態を変換してから測る」＝「測ってから値を変換する」

という「測定」と「変換」の両立条件です。

4. 表現論から見た「量」

次に、「対称性」と「表現論」を使った見方です。

4.1 対称性群の作用

物理系 S に対して、対称性群 G が作用しているとします（例：回転群 $SO(3)$, ローレンツ群, ガリレイ群など）。

- 状態への作用：

$$G \times X(S) \rightarrow X(S), \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

- 値空間 V にも、群 G の表現

$$\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$$

($\rho(g)$ は V 上の線形変換など)

を考えます。

4.2 「量 = 同変写像 (equivariant map)」

物理量 $Q: X(S) \rightarrow V$ が 対称性と両立するとは、

$$Q(g \cdot x) = \rho(g) Q(x) \quad (\forall g \in G, x \in X(S))$$

が成り立つことです。これを

Q は群 G に関して 同変 (equivariant) である

と言います。

これは表現論の言葉では、

- 状態空間上の表現: $G \curvearrowright X(S)$
- 値空間上の表現: $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$
- Q はそれらの間の G -準同型 (intertwiner)

となっていて、

$$Q: X(S) \rightarrow V \quad \text{は} \quad G\text{-equivariant map}$$

です。

4.3 具体例で見ると

1. スカラー量 (温度・エネルギーなど)

対称性群 G の作用に対して値が変わらない場合:

$$\rho(g) = \text{id}_V$$

となり、

$$Q(g \cdot x) = Q(x)$$

これは「スカラー量」としての表現 (自明表現) です。

2. ベクトル量 (速度・力・電場など)

回転群 $\text{SO}(3)$ が作用する場合、

ρ は $\mathbb{R}^3$ 上の標準表現で、

$$Q(g \cdot x) = g Q(x)$$

となる。

→「量がベクトルとして変換する」ことが、表現論的に書けます。

3. テンソル量（応力テンソル・慣性モーメントなど）

$\rho(g)$ がテンソル表現になり、

$$Q(g \cdot x) = \rho(g) Q(x)$$

が成り立つ。

→物理でいう「テンソル量」は、そのまま「対称性群のテンソル表現」として理解できます。

4.4 外延量・内包量とスケーリング群の表現

スケーリング（拡大縮小）の群

$$G = (R^+, \times)$$

を考えると、「次元・単位」の情報は、実はこの群の **1次元表現**（キャラクター）として理解することができます：

$$\chi: R^+ \rightarrow R^+, \quad \chi(\lambda) = \lambda^k$$

- $k = 1$: 長さ・質量など「1次元に比例する量」（外延量）
- $k = 0$: 無次元量・密度・温度（スケール不変）（内包量）
- $k = 2, 3, \dots$: 面積・体積など

スケーリング群の表現 χ によって、「量がスケール変化にどう応答するか」が決まり、

$$Q(\lambda \cdot S) = \chi(\lambda) Q(S)$$

と書けます。

これにより、「外延量／内包量／高次元量」が、**表現論的なラベル k** として統一的に扱えます。

5. 「数-量-圏-表現」のまとめ表

最後に、今までの話を1枚の表にまとめます。

観点	数 (Number)	量 (Quantity)	圏論での像	表現論での像
基本対象	構造付き集合の要素 $x \in R, C, \dots$	写像 $Q: S \rightarrow V$	射 $Q_S: X(S) \rightarrow V$	群作用に関して同変な写像 Q
集合論的説明	N, Z, Q, R などの集合と演算・公理	状態集合 S から値集合 V への関数	関手 $Q: \mathbf{Phys} \rightarrow \mathbf{Set}$, または自然変換 $Q: X \Rightarrow V$	G -表現 ρ を持つ V と、 ρ -同変写像 Q

観点	数 (Number)	量 (Quantity)	圏論での像	表現論での像
役割	抽象的な「数値」の世界	物理世界を数値化する道具	物理系の圏の構造を保つ写像 (関手・自然変換)	対称性群の表現と整合する物理量
外延／内包	直接の区別なし	スケーリングに対する振る舞いで分類	モノイド圏 (Phys , $\oplus$) から (Ab , $+$) へのモノイド関手などとして外延量を表現	スケーリング群の1次元表現 $\chi(\lambda) = \lambda^k$ による次付け (外延: $k \neq 0$, 内包: $k = 0$)
例	$2, \sqrt{2}, \pi, 3 + 4i$	質量 M , 温度 T , 圧力 P , 電荷 Q_e	$M_S : X(S) \rightarrow \mathbb{R}$ など	回転群 $SO(3)$ のもとでベクトル量・テンソル量・スカラー量として変換する物理量

おしまいに

ここまですとまとめると：

1. 集合論の段階

- 数： $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ などの構造付き集合
- 量：状態集合 S から数の集合 V への写像 $Q : S \rightarrow V$

2. 圏論の段階

- 物理理論を圏 **Phys** として見る
- 量は関手・自然変換として、物理操作と整合的に変換される構造

3. 表現論の段階

- 対称性群 G の表現 $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ と状態空間への作用 $G \curvearrowright X(S)$ を考え
- 量は $Q(g \cdot x) = \rho(g)Q(x)$ を満たす同変写像 (G -準同型)

という、一つのきれいな「層構造」になります。

もし次に進めるとしたら：

- ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ から出てくる Noether 量 (エネルギー・運動量・電荷) を、「外延量」「保存量」「表現論 (対称性群)」の観点で一本にまとめる
- あるいは、量圏 (quantity as a category) という形で、「数」「量」「次元」「単位変換」を一つの圏として組み立てると、さらに「数学と物理の統一的な見取り図」がはっきりしてきます。

素晴らしいです。数学と物理学の関連が、「数」と「量」の関連を理解することで、ますます理解を深めることができました。今日は、

英治さん、今日もとても深い議論でしたね。

「数」と「量」を集合論・圏論・表現論の三層構造で統一的に理解しようとする姿勢は、まさに数学と物理学を架橋する最も本質的なアプローチです。

- 数 = 構造をもった集合
- 量 = 物理状態から数への写像
- 圏論 = 量に関手・自然変換として整理する枠組み
- 表現論 = 量が対称性群に対してどう変換するかを特徴づける枠組み

という全体像が、今回とても美しくまとまりました。

この理解があると、今後の話題——

Noether の定理、ラグランジアン密度、ゲージ対称性、テンソル場、量子場、幾何学的場の構造など

すべてが「数」「量」「対称性」「写像」という共通の基盤でつながって見えてきます。

今日のところはここまでしておきましょう。

またいつでも続きを一緒に探求しましょうね。

英治さん、本日もありがとうございました。