

# ヒルベルト空間と場の量子論

北島英治（2026年3月）

物理学と数学の関連に興味があります。今回は、数学における実数と複素素数の「フーリエ級数」「フーリエ変換」と「ヒルベルト空間」「線形作用素」「作用素の固有値」、そして、物理学の「場の量子論」における「スカラー場」「ベクトル場」「スピノル場」と、その「量子化」について理解を深めたい。第1の質問です。数学における実数と複素素数の「フーリエ級数」「フーリエ変換」と「ヒルベルト空間」「線形作用素」「作用素の固有値」について、数学术語と数式をもちいて、段階的に説明し定義してください。そのまとめの表を作成してください。英治

思考時間: 11s >

英治さん、ありがとうございます。

まず一点だけ確認すると、今回の「複素素数」は、文脈からみて「複素数」のこととして読んで説明するのが自然です。日本語では通常「複素数」と言い、「複素素数」という語は標準的には一般の complex number を指しません。いっぽうで、整数論ではガウス素数 (Gaussian prime) のように、複素整数における「素数」に相当する概念はあります。したがって、以下では実数と複素数について説明します。必要なら次回、ガウス素数も別に整理できます。 ウキペディア +2

## 第1の質問

数学における実数と複素数の「フーリエ級数」「フーリエ変換」「ヒルベルト空間」「線形作用素」「作用素の固有値」

以下では、できるだけ順を追って、

1. 実数・複素数
2. 関数空間
3. フーリエ級数
4. フーリエ変換
5. ヒルベルト空間
6. 線形作用素
7. 固有値問題

の順に説明します。

## 1. 実数と複素数

### 1.1 実数

実数全体の集合を

$$\mathbb{R}$$

と書きます。

これは、直線上の点を表す数の体系です。

たとえば

$$x \in \mathbb{R}$$

とは、 $x$  が実数であることを意味します。

### 1.2 複素数

複素数全体の集合を

$$\mathbb{C}$$

と書きます。

複素数は

$$z = a + ib \quad (a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1)$$

の形で表されます。

ここで

- $a = \Re z$  : 実部
- $b = \Im z$  : 虚部

です。

複素共役は

$$\bar{z} = a - ib$$

であり、絶対値は

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

です。

### 1.3 なぜ複素数が重要か

フーリエ解析では、複素指数関数

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

が中心的な役割を果たします。

これはオイラーの公式です。

したがって、実関数を扱う場合でも、解析の計算は複素数体  $\mathbb{C}$  上で行うと非常に整理されます。

## 2. 関数空間という考え方

通常の数  $x, y, z$  だけでなく、**関数そのもの** を「ベクトル」とみなす考え方があります。

たとえば区間  $[-\pi, \pi]$  上の複素数値関数全体を考えると、

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

という関数が「空間の点」になります。

このとき

- 和 :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- スカラー倍 :

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

で定義され、関数全体はベクトル空間になります。

## 3. フーリエ級数

### 3.1 基本思想

周期関数を、三角関数や複素指数関数の無限和として表すのがフーリエ級数です。

周期  $2\pi$  の関数  $f(x)$  に対して、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と展開します。

これを **実フーリエ級数** といいます。

### 3.2 実フーリエ係数

係数は直交性から

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (n \geq 0)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n \geq 1)$$

で与えられます。

### 3.3 複素フーリエ級数

複素指数関数

$$e^{inx}$$

を使うと、より簡潔に

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

と書けます。

係数は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

です。

### 3.4 直交性

複素フーリエ級数の基底関数  $e^{inx}$  は、内積

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

に関して直交します。実際、

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 2\pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

です。

この直交性が、フーリエ係数を取り出せる理由です。

### 3.5 意味

つまりフーリエ級数とは、

関数  $f$  を、直交基底  $\{e^{inx}\}$  に沿って分解すること

です。

有限次元線形代数で

$$v = \sum_i c_i e_i$$

とベクトルを基底展開することの、無限次元版です。

## 4. フーリエ変換

#### 4.1 フーリエ級数からフーリエ変換へ

フーリエ級数は 周期関数 を扱います。

一方、フーリエ変換は 非周期関数 を扱います。

フーリエ級数では離散的な周波数  $n \in \mathbb{Z}$  が出てきますが、

フーリエ変換では連続的な周波数  $k \in \mathbb{R}$  が出てきます。

#### 4.2 定義

関数  $f(x)$  のフーリエ変換を

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

と定義します。

逆変換は規格化の流儀によりますが、代表的には

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dk$$

です。

#### 4.3 意味

$\hat{f}(k)$  は、関数  $f(x)$  の中に周波数  $k$  の成分がどれだけ含まれるかを表します。

つまり

- $x$ -表示：位置空間
- $k$ -表示：周波数空間、運動量空間

という二つの見方をつなぐ変換です。

物理学ではこれが非常に重要で、量子力学・場の量子論では

$$p = \hbar k$$

により、フーリエ変換は位置表示と運動量表示の橋渡しになります。

#### 4.4 重要公式

線形性

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$$

微分の変換

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx}f(x)\right](k) = ik\hat{f}(k)$$

畳み込み

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy$$

に対し、

$$\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$$

パーセバル・プランシエル型公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk$$

これは長さ（ノルム）が保存されることを示します。

## 5. ヒルベルト空間

### 5.1 定義の考え方

ヒルベルト空間とは、

内積が定義された完備なベクトル空間

です。

### 5.2 内積

複素ベクトル空間  $H$  上で、内積

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$$

が定義され、次を満たします。

1. 線形性 (第1変数について)

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$$

2. 共役対称性

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$$

3. 正定値性

$$\langle f, f \rangle \geq 0, \quad \langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$$

ノルムは

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

で定まります。

### 5.3 完備性

完備とは、コーシー列が空間内で極限を持つことです。

つまり、空間の中で近づき続ける列があれば、その極限もまたその空間内に存在する、という性質です。

### 5.4 代表例

有限次元

$$\mathbb{R}^n, \quad \mathbb{C}^n$$

はヒルベルト空間です。

内積は

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$$

です。

無限次元

$$L^2([-\pi, \pi]), \quad L^2(\mathbb{R})$$

が重要です。

ここで

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

です。

内積は

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx$$

です。

## 5.5 フーリエ解析との関係

フーリエ級数では

$$\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

が  $L^2([-\pi, \pi])$  の直交基底になります。

フーリエ変換では  $L^2(\mathbb{R})$  上で、関数を周波数成分へと分解します。

つまり、フーリエ解析はヒルベルト空間における「基底展開」の理論です。

## 6. 線形作用素

### 6.1 定義

ベクトル空間  $V$  から  $W$  への写像

$$T : V \rightarrow W$$

が線形であるとは、

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$$

を満たすことです。

特に  $V = W = H$  のとき、 $T : H \rightarrow H$  をヒルベルト空間上の線形作用素といいます。

### 6.2 例

恒等作用素

$$I(f) = f$$

微分作用素

$$D = \frac{d}{dx}, \quad Df = f'$$

2階微分作用素

$$T = -\frac{d^2}{dx^2}$$

乗算作用素

$$(M_x f)(x) = xf(x)$$

### 6.3 行列との対応

有限次元では線形作用素は行列で表されます。

無限次元では「行列」に対応するものが作用素です。

つまり、

- 有限次元線形代数：行列  $A$
- 無限次元関数空間：作用素  $T$

という対応があります。

## 6.4 自己共役作用素

物理で特に重要なのは自己共役作用素です。

作用素  $T$  の随伴  $T^\dagger$  が

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^\dagger g \rangle$$

で定義され、もし

$$T = T^\dagger$$

なら自己共役です。

自己共役作用素は、物理量を表す演算子の数学的モデルになります。

## 7. 作用素の固有値

### 7.1 定義

線形作用素  $T$  に対して、

$$T\psi = \lambda\psi, \quad \psi \neq 0$$

を満たす  $\lambda \in \mathbb{C}$  を **固有値**、 $\psi$  を **固有関数** (または固有ベクトル) といいます。

### 7.2 有限次元での意味

行列  $A$  に対して

$$Av = \lambda v$$

です。

これは「作用しても向きが変わらず、倍率だけ変わるベクトル」を意味します。

### 7.3 無限次元での例

作用素

$$T = -\frac{d^2}{dx^2}$$

を区間  $[0, L]$  上、境界条件

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

のもとで考えると、

$$-\psi''(x) = \lambda\psi(x)$$

という固有値問題になります。

解くと

$$\psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

となります。

これはまさにフーリエ正弦級数の基底です。

### 7.4 スペクトルという見方

固有値全体、あるいはより一般に作用素に対応する値の集合を **スペクトル** といいます。

有限次元では「固有値の集合」に近いですが、無限次元では連続スペクトルも現れます。

たとえばフーリエ変換で現れる連続周波数  $k \in \mathbb{R}$  は、連続スペクトルの典型例です。

## 8. これらの全体的な関係

ここまでの内容は、次の流れでつながっています。

### 8.1 実数・複素数

まず関数値や係数を

$$\mathbb{R}, \mathbb{C}$$

で考える。

### 8.2 関数空間

関数の集まりをベクトル空間とみなす。

### 8.3 ヒルベルト空間

そのベクトル空間に内積を入れて、長さ・直交・展開を可能にする。

### 8.4 フーリエ級数・フーリエ変換

関数を直交基底または周波数成分に分解する。

### 8.5 線形作用素

微分や乗算などを作用素として表現する。

### 8.6 固有値問題

作用素の本質を

$$T\psi = \lambda\psi$$

で調べる。

## 9. 物理学への入口

これは次回の「場の量子論」に直接つながります。

たとえば量子場では、

- 場を関数として扱う
- 場をフーリエ変換して運動量モードに分解する
- 各モードを調和振動子として量子化する
- 作用素の固有値がエネルギーや運動量に対応する

という流れになります。

つまり、今回の数学は、次回扱う

- スカラー場
- ベクトル場
- スピノル場
- 量子化

のための基礎言語になっています。

## 10. まとめ表

### 10.1 基本概念のまとめ

項目	数学的定義	代表式	意味
実数	連続量を表す数体系	$x \in \mathbb{R}$	直線上の量
複素数	実数と虚数単位からなる数	$z = a + ib$	振動・回転・波の記述に便利
複素共役	虚部の符号反転	$\bar{z} = a - ib$	内積・絶対値に必要

項目	数学的定義	代表式	意味
絶対値	複素数の大きさ	(	z

## 10.2 フーリエ解析のまとめ

項目	定義	数式	役割
実フーリエ級数	周期関数を sin, cos で展開	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$	周期関数の分解
複素フーリエ級数	周期関数を複素指数関数で展開	$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$	より統一的な表現
フーリエ係数	基底への射影	$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$	周波数成分の強さ
フーリエ変換	非周期関数の周波数分解	$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$	位置空間と周波数空間の変換
逆変換	元の関数を復元	$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$	情報の再構成
直交性	基底関数の独立性	$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = 2\pi \delta_{nm}$	係数抽出の基礎

## 10.3 ヒルベルト空間のまとめ

項目	定義	数式	意味
ヒルベルト空間	内積を持つ完備なベクトル空間	$H$	無限次元の幾何学
内積	ベクトル間の角度・長さを定める	$\langle f, g \rangle = \int f \bar{g}$	直交・展開の基礎
ノルム	ベクトルの長さ	$\ f\  = \sqrt{\langle f, f \rangle}$	距離の導入
$L^2$ 空間	二乗可積分関数の空間	$\int f \bar{g}$	f
直交基底	互いに直交し空間を張る系	$\{e^{inx}\}$	関数の展開を可能にする

## 10.4 線形作用素と固有値のまとめ

項目	定義	数式	意味
線形作用素	線形性を保つ写像	$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T f + \beta T g$	無限次元の行列
微分作用素	関数を微分する作用素	$Df = f'$	波動方程式・場の方程式に現れる
乗算作用素	関数に変数を掛ける作用素	$(M_x f)(x) = x f(x)$	位置演算子の原型
自己共役作用素	随伴と一致する作用素	$T = T^\dagger$	物理量の数学的表現
固有値問題	作用素が倍率だけ与える状態	$T\psi = \lambda\psi$	エネルギー準位・周波数の基礎
スペクトル	固有値の一般化	$\sigma(T)$	離散・連続両方を含む

## 11. 最後の要約

今回の内容を一つの式の流れで書くと、

数( $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ )  $\rightarrow$  関数空間  $\rightarrow$  ヒルベルト空間  $\rightarrow$  フーリエ分解  $\rightarrow$  線形作用素  $\rightarrow$  固有値問題  
となります。

そしてこれは次に扱う場の量子論で

場  $\rightarrow$  モード分解  $\rightarrow$  作用素化  $\rightarrow$  量子化

へと自然につながります。

次の第2の質問では、この土台の上に  
スカラー場・ベクトル場・スピノル場とその量子化  
を、同じように数式で段階的に整理できます。

 情報源

第2の質問です。物理学の「場の量子論」における「スカラー場」「ベクトル場」「スピノル場」と、その「量子化」について、数学用語と数式を用いて段階的に説明し定義してください。それらの「場」は、各種の「平面波」として表現できると理解しています。まとめの表も作成してください。

英治さん、ありがとうございます。

はい、その理解は本質的に正しいです。場の量子論では、

- スカラー場
- ベクトル場
- スピノル場

はいずれも、まず古典場として定義され、つぎにそれぞれの場を平面波モードに分解し、その各モードを量子化する、という流れで理解できます。

ただし、少し正確に言うと、

- 古典場 は平面波の重ね合わせとして表される
- 量子場 はその平面波モードの係数が、もはや単なる複素数ではなく、生成演算子・消滅演算子 になる

という点が重要です。

以下、数学用語と数式を用いて、段階的に整理します。

## 第2の質問

### 場の量子論におけるスカラー場・ベクトル場・スピノル場とその量子化

#### 1. 場の量子論の基本的な見方

##### 1.1 場とは何か

場とは、時空の各点に値を対応させる写像です。

ミンコフスキー時空を

$$x^\mu = (t, \mathbf{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

と書くと、場は一般に

$$x \mapsto (\text{ある値})$$

という写像です。

つまり数学的には、

- スカラー場：

$$\phi: \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R} \text{ または } \mathbb{C}$$

- ベクトル場：

$$A^\mu : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$$

- スピノール場：

$$\psi : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{C}^4$$

のようなものです。

## 1.2 古典場から量子場へ

古典場では  $\phi(x)$ ,  $A^\mu(x)$ ,  $\psi(x)$  は普通関数です。  
量子場ではそれらは **演算子値分布** になります。

つまり

$$\begin{aligned}\phi(x) &\longrightarrow \hat{\phi}(x) \\ A^\mu(x) &\longrightarrow \hat{A}^\mu(x) \\ \psi(x) &\longrightarrow \hat{\psi}(x)\end{aligned}$$

です。

ここで「帽子」は演算子であることを表します。

## 2. スカラー場

### 2.1 定義

スカラー場は、ローレンツ変換に対して成分を持たず、値そのものが不変に変換する場です。

ローレンツ変換

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

に対して、スカラー場は

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

を満たします。

これは「場の値がスカラーとして変換する」という意味です。

### 2.2 ラグランジアン密度

自由実スカラー場のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

です。

ここで

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

です。

### 2.3 運動方程式

オイラー＝ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

を使うと、

$$(\square + m^2)\phi = 0$$

を得ます。

ここで

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

はダランベール演算子です。

これは **クライン=ゴールドン方程式** です。

## 2.4 平面波解

この方程式の解として平面波

$$\phi(x) = e^{-ip \cdot x}$$

を代入すると、

$$(-p_\mu p^\mu + m^2)e^{-ip \cdot x} = 0$$

より

$$p_\mu p^\mu = m^2$$

を得ます。

つまり

$$p^0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

です。

したがって一般解は

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (a(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + a^*(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}) \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}$$

のように、平面波の重ね合わせで書けます。

ここで

- $e^{-ip \cdot x}$  : 正周波数モード
- $e^{ip \cdot x}$  : 負周波数モード

です。

## 2.5 正準量子化

共役運動量を

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \dot{\phi}(x)$$

と定義します。

量子化では

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{y})] = 0$$

$$[\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})] = 0$$

という等時交換関係を課します。

## 2.6 モード展開と生成・消滅演算子

量子化されたスカラー場は

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\hat{a}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})e^{ip \cdot x})$$

と展開されます。

ここで

- $\hat{a}(\mathbf{p})$ : 消滅演算子
- $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$ : 生成演算子

であり、

$$[\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{q})] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

を満たします。

各  $\mathbf{p}$ -モードは量子調和振動子に対応します。

## 2.7 物理的意味

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$$

は運動量  $\mathbf{p}$  をもつ粒子1個状態を作ります。

したがって、スカラー場を量子化するとスカラー粒子が現れる、ということです。

## 3. ベクトル場

### 3.1 定義

ベクトル場は時空の各点で4元ベクトル値をもつ場です。

$$A^\mu(x)$$

で表します。

ローレンツ変換に対して

$$A^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$$

と変換します。

### 3.2 電磁場との関係

もっとも重要な例は電磁4元ポテンシャル

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$$

です。

そこから場の強さテンソル

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

を定義します。

成分で書けば、 $F_{\mu\nu}$  は電場・磁場を含みます。

### 3.3 ラグランジアン密度

自由電磁場のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

です。

質量付きベクトル場なら

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$$

で、これはプロカ場です。

---

### 3.4 運動方程式

自由質量なしの場合、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

です。

質量ありなら

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$$

です。

---

### 3.5 平面波解

ベクトル場も平面波解

$$A^\mu(x) = \epsilon^\mu(p)e^{-ip \cdot x}$$

を持ちます。

ここで  $\epsilon^\mu(p)$  は偏極ベクトルです。

質量なしなら

$$p^2 = 0$$

であり、さらにゲージ条件の下で

$$p_\mu \epsilon^\mu(p) = 0$$

が課されます。

質量ありなら

$$p^2 = m^2$$

です。

---

### 3.6 偏極の自由度

ベクトル場では、平面波そのものだけでなく、その前に付く偏極ベクトル  $\epsilon^\mu$  が重要です。

- 質量なしベクトル粒子：物理自由度は2
- 質量ありベクトル粒子：物理自由度は3

です。

たとえば光子は横偏極2自由度を持ちます。

---

### 3.7 量子化

ベクトル場の量子化では、ゲージ対称性のためスカラー場より少し複雑です。形式的には

$$\hat{A}^\mu(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [\epsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x} + \epsilon^{\mu*}(\mathbf{p}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}]$$

と書けます。

ここで  $\lambda$  は偏極ラベルです。

生成・消滅演算子は

$$[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}, \lambda')] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{\lambda\lambda'}$$

を満たします。

ただし質量なしゲージ場では、実際にはゲージ固定や制約条件を慎重に扱う必要があります。

### 3.8 物理的意味

ベクトル場の量子はベクトル粒子です。

- 電磁場 → 光子
- 弱相互作用のゲージ場 →  $W^\pm, Z^0$
- 色ゲージ場 → グルオン

です。

## 4. スピノル場

### 4.1 定義

スピノル場はローレンツ群のスピノル表現に従って変換する場です。

通常はディラックスピノル

$$\psi(x) \in \mathbb{C}^4$$

を考えます。

ローレンツ変換に対して

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$$

と変換します。

ここで  $S(\Lambda)$  はベクトル表現  $\Lambda$  とは異なる、スピノル表現です。

### 4.2 ラグランジアン密度

自由ディラック場のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

です。

ここで

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

はディラック随伴であり、 $\gamma^\mu$  はガンマ行列で

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I$$

を満たします。

### 4.3 運動方程式

オイラー＝ラグランジュ方程式から

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

を得ます。

これがディラック方程式です。

#### 4.4 平面波解

ディラック方程式の平面波解は

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip \cdot x}$$

または

$$\psi(x) = v(p)e^{ip \cdot x}$$

です。

ここで  $u(p), v(p)$  は定数スピノルで、それぞれ

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0$$

を満たします。

したがって、スピノル場もやはり平面波モードの重ね合わせで表現されます。ただし係数が単なる数ではなく、**スピノル** になります。

#### 4.5 量子化

スピノル場はボース場ではなくフェルミ場なので、交換関係ではなく**反交換関係**を課します。

場のモード展開は

$$\hat{\psi}(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ \hat{b}_s(\mathbf{p})u_s(p)e^{-ip \cdot x} + \hat{d}_s^\dagger(\mathbf{p})v_s(p)e^{ip \cdot x} \right]$$

です。

ここで

- $\hat{b}_s(\mathbf{p})$  : 粒子の消滅演算子
- $\hat{b}_s^\dagger(\mathbf{p})$  : 粒子の生成演算子
- $\hat{d}_s(\mathbf{p})$  : 反粒子の消滅演算子
- $\hat{d}_s^\dagger(\mathbf{p})$  : 反粒子の生成演算子

です。

反交換関係は

$$\{\hat{b}_r(\mathbf{p}), \hat{b}_s^\dagger(\mathbf{q})\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{rs}$$

$$\{\hat{d}_r(\mathbf{p}), \hat{d}_s^\dagger(\mathbf{q})\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{rs}$$

であり、他は0です。

#### 4.6 物理的意味

スピノル場を量子化するとフェルミ粒子が現れます。

- 電子
- ミューオン
- ニュートリノ
- クォーク

などです。

また、反粒子状態も自然に現れます。

## 5. 「各種の平面波」として表現できるとはどういう意味か

英治さんの理解の核心はここです。

### 5.1 共通構造

スカラー場・ベクトル場・スピノル場はいずれも、自由場では

$$\text{場} = \int d^3p (\text{モード係数}) \times e^{-ip \cdot x} + \text{共役項}$$

という形で表されます。

つまり、いずれも本質的には 時空中のフーリエ分解 です。

### 5.2 違い

ただし違いは、平面波の係数が何を表すかです。

#### スカラー場

$$a(\mathbf{p})$$

は複素数、量子化後はスカラー粒子の生成・消滅演算子。

#### ベクトル場

$$\epsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) a(\mathbf{p}, \lambda)$$

という形になり、偏極ベクトルが付く。

#### スピノル場

$$u_s(p) b_s(\mathbf{p}), \quad v_s(p) d_s^\dagger(\mathbf{p})$$

という形になり、スピノル係数が付く。

したがって、どれも平面波展開ではあるが、値が属する表現空間が異なる、ということです。

## 6. 量子化の本質

### 6.1 古典場では

古典場では、平面波展開の係数は単なる複素数です。

たとえば

$$\phi(x) = \int d^3p [a(\mathbf{p}) e^{-ipx} + a^*(\mathbf{p}) e^{ipx}]$$

### 6.2 量子場では

量子場ではこれを

$$a(\mathbf{p}) \rightarrow \hat{a}(\mathbf{p}), \quad a^*(\mathbf{p}) \rightarrow \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$$

と置き換えます。

つまり、各モードが1個の量子調和振動子になるわけです。

### 6.3 ボース場とフェルミ場

量子化の型は2種類あります。

## ボース場

スカラー場、ベクトル場

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \neq 0$$

という交換関係。

## フェルミ場

スピノル場

$$\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} \neq 0$$

という反交換関係。

これはスピン統計定理と対応します。

- 整数スピン → ボース統計
- 半整数スピン → フェルミ統計

です。

## 7. 3つの場を統一的に見る

3つの場は、数学的には「ローレンツ群のどの表現に従うか」で区別されます。

### 7.1 スカラー場

表現：自明表現

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

### 7.2 ベクトル場

表現：4元ベクトル表現

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$$

### 7.3 スピノル場

表現：スピノル表現

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$$

したがって、場の種類の違いは「何を値として持つか」だけでなく、「対称性のもとでどう変換するか」の違いでもあります。

## 8. 数学から物理への対応

今回の内容は、前回の数学とちよつと対応しています。

### 8.1 フーリエ変換との関係

場を平面波展開することは、場を運動量空間で表すことです。

$$\phi(x) \leftrightarrow \tilde{\phi}(p)$$

です。

### 8.2 ヒルベルト空間との関係

量子化後には、場の生成演算子が作用する空間として **フォック空間** が現れます。

$$\mathcal{F} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H}_1 \oplus (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1)_\perp \oplus \cdots$$

ここで  $\mathcal{H}_1$  は1粒子ヒルベルト空間です。

### 8.3 線形作用素との関係

量子場  $\hat{\phi}, \hat{A}^\mu, \hat{\psi}$  はフォック空間上の作用素です。  
 また、運動量演算子・ハミルトニアンも線形作用素です。

### 8.4 固有値との関係

1粒子状態

$$|\mathbf{p}\rangle = \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$$

は運動量演算子  $\hat{P}^\mu$  の固有状態であり、

$$\hat{P}^\mu|\mathbf{p}\rangle = p^\mu|\mathbf{p}\rangle$$

となります。

したがって、場の平面波モードは、運動量固有値に対応しています。

## 9. まとめ表

### 9.1 3つの場の比較表

場の種類	数学的値	ローレンツ変換	自由ラグランジアン密度	運動方程式
スカラー場 $\phi$	$\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$	$\phi'(x') = \phi(x)$	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$	$(\square + m^2)\phi = 0$
ベクトル場 $A^\mu$	4元ベクトル	$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$	$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$
スピノル場 $\psi$	$\mathbb{C}^4$	$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$	$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$	$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$

### 9.2 量子化の比較表

場の種類	モード係数	量子化後	関係	粒子の型
スカラー場	$a(\mathbf{p}), a^*(\mathbf{p})$	$\hat{a}, \hat{a}^\dagger$	交換関係	ボソン
ベクトル場	$a(\mathbf{p}, \lambda), a^*(\mathbf{p}, \lambda)$ と偏極 $e^\mu$	$\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda)$	交換関係	ボソン
スピノル場	$b_s, d_s$ 型係数とスピノル $u_s, v_s$	$\hat{b}_s, \hat{b}_s^\dagger, \hat{d}_s, \hat{d}_s^\dagger$	反交換関係	フェルミオン

### 9.3 共通構造の表

段階	数学的内容	物理的意味
1	場 $\Phi(x)$ を定義	時空の各点に値を与える
2	ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ を与える	力学法則を決める
3	オイラー＝ラグランジュ方程式を導く	場の運動方程式を得る
4	平面波解 $e^{-ip\cdot x}$ を求める	運動量固有モードに分解する
5	フーリエ展開する	全場をモードの重ね合わせで表す
6	係数を演算子化する	粒子の生成・消滅を導入する
7	交換関係/反交換関係を課す	ボース統計・フェルミ統計を決める

## 10. 最後の要約

今回の核心を一行でまとめると、

場 = ローレンツ群の表現に従う関数

であり、自由場では

場 = 平面波モードの重ね合わせ

と書けて、量子化とは

モード係数  $\rightarrow$  生成・消滅演算子

とすることです。

さらに、3つの場の違いは

- スカラー場：値がスカラー
- ベクトル場：値がベクトル
- スピノル場：値がスピノル

であり、量子化後には

- スカラー場  $\rightarrow$  スカラー粒子
- ベクトル場  $\rightarrow$  ベクトル粒子
- スピノル場  $\rightarrow$  フェルミ粒子

が現れます。

次の第3の質問では、この内容をさらに進めて、たとえば

- フーリエ変換と場のモード展開の厳密な対応
- 各モードがなぜ調和振動子になるのか
- フォック空間と粒子数演算子
- 相互作用場では平面波展開がどう変わるか

まで、数式で段階的に整理できます。

📄 👍 🗨️ 📌 🔄 …

第3の質問です。アインシュタインの「重力理論」について、その運動方程式と重力方程式と

英治さん、ありがとうございます。

文が途中で終わっているようですが、文脈からすると今回は

- アインシュタインの重力理論（一般相対性理論）
- その運動方程式
- その重力場方程式（アインシュタイン方程式）
- そして両者の関係

を知りたい、という流れだと理解して、段階的に説明します。

## 第3の質問

### アインシュタインの重力理論における運動方程式と重力方程式

#### 1. 全体像

アインシュタインの重力理論、すなわち一般相対性理論では、重力はニュートン力学のような「力」そのものとしてではなく、

時空の曲がり

として表されます。

この理論には大きく分けて二つの方程式があります。

### 1. 重力場そのものを決める方程式

これは

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

というアインシュタイン方程式です。

### 2. その曲がった時空中で物体がどう動くかを定める方程式

これは

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

という測地線方程式です。

つまり、

物質・エネルギー → 時空を曲げる  
曲がった時空 → 物体の運動を決める

という二段階の構造になっています。

## 2. 時空の数学的表現

一般相対性理論では、時空は4次元多様体  $M$  と、その上のローレンツ計量

$$g_{\mu\nu}(x)$$

によって表されます。

時空間隔は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

です。

ここで

- $x^\mu$  は時空座標
- $g_{\mu\nu}$  は計量テンソル
- $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

です。

この計量  $g_{\mu\nu}$  が、時空の長さ・角度・因果構造を決めます。

## 3. 運動方程式：測地線方程式

### 3.1 自由粒子の運動

重力以外の力を受けない自由粒子は、曲がった時空中で測地線に沿って動きます。

これは「最短距離」というより、ローレンツ時空では「固有時を停留にする曲線」です。

粒子の作用は

$$S = -mc \int ds$$

です。すなわち

$$S = -mc \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

です。

これを変分すると、オイラー＝ラグランジュ方程式から測地線方程式が出ます。

### 3.2 測地線方程式

結果は

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

です。

ここで  $\tau$  は固有時、 $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  はクリストッフェル記号で

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\rho})$$

です。

これは厳密にはテンソルではありませんが、接続係数として「座標変化に伴うベクトルの変化」を表します。

### 3.3 意味

この方程式は

$$\text{加速度} + \text{幾何学的補正} = 0$$

という形です。

ニュートン力学のように右辺に「重力」が直接書かれていないのが特徴です。

代わりに、 $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  が時空の曲がりを通じて運動を決めます。

つまり、重力は力ではなく幾何学です。

## 4. 重力方程式：アインシュタイン方程式

### 4.1 曲率テンソル

時空の曲がりには曲率テンソルで表されます。

まずリーマン曲率テンソル

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

を定義します。

これを縮約するとリッチテンソル

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$$

を得ます。

さらにスカラー曲率

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

を得ます。

### 4.2 アインシュタインテンソル

アインシュタインテンソルは

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

で定義されます。

このテンソルは重要な恒等式

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$$

を満たします。

### 4.3 物質側：エネルギー運動量テンソル

物質や場の分布はエネルギー運動量テンソル

$$T_{\mu\nu}$$

で表されます。

これは

- エネルギー密度
- 運動量密度
- 応力
- 圧力

をまとめたテンソルです。

たとえば完全流体なら

$$T_{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$$

です。

### 4.4 アインシュタイン方程式

重力場方程式は

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

です。

宇宙項  $\Lambda$  を省けば

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

です。

左辺は時空の幾何学、右辺は物質・エネルギーです。

言葉で言えば、

物質は時空にどのように曲がるべきかを教え、  
曲がった時空は物体にどのように動くべきかを教える

ということです。

## 5. 作用原理からの導出

一般相対性理論も作用原理から導けます。

重力の作用はアインシュタイン・ヒルベルト作用

$$S_{\text{grav}} = \frac{c^3}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x$$

です。

物質作用  $S_{\text{matter}}$  を加えて

$$S = S_{\text{grav}} + S_{\text{matter}}$$

とします。

これを計量  $g_{\mu\nu}$  について変分すると、

$$\delta S = 0$$

からアインシュタイン方程式が得られます。

## 5.1 物質テンソルの定義

エネルギー-運動量テンソルは作用から

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

で定義できます。

したがって一般相対性理論では、

- 計量に関する変分 → 重力方程式
- 粒子軌道に関する変分 → 運動方程式

という二種類の変分が現れます。

## 6. 運動方程式と重力方程式の関係

ここが最も重要です。

### 6.1 重力方程式

アインシュタイン方程式は、与えられた物質分布  $T_{\mu\nu}$  から、計量  $g_{\mu\nu}$  を決めます。

$$T_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu}$$

### 6.2 運動方程式

次に、その計量  $g_{\mu\nu}$  からクリストッフェル記号  $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$  を求め、測地線方程式を解くと粒子の軌道  $x^{\mu}(\tau)$  が決まります。

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \longrightarrow x^{\mu}(\tau)$$

つまり全体として

$$T_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \rightarrow \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \rightarrow \text{粒子軌道}$$

です。

## 7. ニュートン重力との対応

一般相対性理論は弱い重力・低速極限でニュートン力学に一致します。

計量を

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

とし、静的・低速極限を取ると、

$$g_{00} \approx -(1 + 2\Phi/c^2)$$

となり、 $\Phi$  はニュートンポテンシャルに対応します。

このときアインシュタイン方程式はポアソン方程式

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

に帰着します。

また測地線方程式は

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla \Phi$$

となり、ニュートンの運動方程式になります。

## 8. 具体例：シュヴァルツシルト解

球対称・真空中では

$$T_{\mu\nu} = 0$$

なのでアインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} = 0$$

になります。

その解の一つがシュヴァルツシルト計量です。

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

この計量を測地線方程式に代入すると、

- 惑星の軌道
- 光の曲がり
- 重力赤方偏移

などが説明できます。

## 9. 数学的に見る構造

一般相対性理論は、数学的には次の流れで構成されています。

### 9.1 多様体

時空  $M$

### 9.2 計量

$$g_{\mu\nu}$$

で長さや因果構造を与える

### 9.3 接続

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$$

で平行移動と共変微分を定義する

### 9.4 曲率

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}, R_{\rho\mu\nu}, R$$

で時空の曲がりを測る

### 9.5 場方程式

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

### 9.6 運動方程式

$$\frac{Du^{\mu}}{D\tau} = 0$$

すなわち測地線方程式

## 10. まとめ表

### 10.1 基本対象の表

項目	数学的对象	数式	意味
時空	4次元多様体	$M$	物理現象の舞台

項目	数学的対象	数式	意味
計量	対称2階テンソル	$g_{\mu\nu}$	距離・時間・因果構造を決める
接続	クリストッフェル記号	$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$	ベクトルの変化・測地線を決める
曲率	リーマン曲率	$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$	時空の曲がり
物質分布	エネルギー-運動量テンソル	$T_{\mu\nu}$	エネルギー・運動量・圧力

## 10.2 重力方程式の表

名称	数式	役割
リッチテンソル	$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$	曲率の縮約
スカラー曲率	$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$	曲率の全体量
アインシュタインテンソル	$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$	重力方程式の幾何学側
アインシュタイン方程式	$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$	物質が時空を曲げる法則

## 10.3 運動方程式の表

名称	数式	意味
自由粒子作用	$S = -mc \int ds$	粒子運動の出発点
測地線方程式	$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} = 0$	曲がった時空での自由運動
共変形式	$\frac{Du^{\mu}}{D\tau} = 0$	4速度が平行移動される
ニュートン極限	$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla\Phi$	古典重力への極限

## 10.4 全体関係の表

段階	数学的操作	物理的意味
1	$T_{\mu\nu}$ を与える	物質・エネルギーの分布を決める
2	アインシュタイン方程式を解く	計量 $g_{\mu\nu}$ を求める
3	$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ を計算する	時空の接続を求める
4	測地線方程式を解く	粒子や光の軌道を求める
5	観測量を計算する	軌道、光の偏向、時間遅れなどを説明する

## 11. 今回の核心

今回の核心は、一般相対性理論では

$$\text{重力方程式: } G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

が時空そのものを決め、

$$\text{運動方程式: } \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} = 0$$

がその時空の中での粒子の運動を決める、という二層構造です。

つまり、

物質 → 時空の曲率 → 運動

です。

英治さんが望まれば、次に  
第4の質問として、アインシュタイン方程式をアインシュタイン・ヒルベルト作用から実際に変分して導く計算  
を、テンソル記法で段階的に行えます。

📄 🗑️ 🔄 📌 ⋮

「重力理論」に関して、その「重力場」「重力波」の数式を示して下さい。その「重力場」が「量子化」できないと理解しています。その理由を数式を用いて段階的に説明してください。そして今後、重力場の「量子化」への方策を教えてください。

英治さん、ありがとうございます。  
とても本質的な質問です。

まず最初に、重要な点をひとつ明確にします。

「重力場は量子化できない」という言い方は、厳密には少し修正が必要です。  
より正確には、次のように言います。

重力場は「まったく量子化できない」のではなく、通常の場合の量子論と同じやり方では、うまく完結しない

特に、

- 弱い重力場のまわりでは、重力波を小さなゆらぎとして扱い、摂動的に量子化することはできます。
- しかしその理論は、電磁場や弱い相互作用のような意味での摂動論的くりこみ可能な量子場理論にはなりません。

したがって今回は、

1. 重力場の数式
2. 重力波の数式
3. それを量子化しようとする何が起るのか
4. なぜ困難なのか
5. 今後の量子化への方策

を段階的に説明します。

## 1. 重力理論における「重力場」の数式

一般相対性理論では、重力場はニュートン力学のようなスカラー・ベクトルの力場ではなく、時空の計量で表されます。

$$g_{\mu\nu}(x)$$

これが重力場です。

### 1.1 時空間隔

計量  $g_{\mu\nu}$  によって、時空間隔は

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

と定義されます。

ここで

- $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$
- $x^\mu = (t, x, y, z)$

です。

## 1.2 アインシュタイン方程式

重力場  $g_{\mu\nu}$  を決める方程式は

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

です。

宇宙項  $\Lambda$  を省けば

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

です。

ここで

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

であり、

- $R_{\mu\nu}$  : リッチテンソル
- $R$  : スカラー曲率
- $T_{\mu\nu}$  : エネルギー-運動量テンソル

です。

---

## 1.3 ニュートン極限での重力場

弱い重力・低速極限では

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

とおきます。

$\eta_{\mu\nu}$  はミンコフスキー計量です。

特に

$$g_{00} \approx - \left( 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right)$$

と書けて、 $\Phi$  はニュートン重力ポテンシャルです。

このときアインシュタイン方程式は

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

に近づきます。

つまり、一般相対論では重力場の本体は  $g_{\mu\nu}$  ですが、弱い場ではニュートンポテンシャル  $\Phi$  がその近似になります。

---

## 2. 重力波の数式

重力波とは、計量の小さな波動的ゆらぎです。

### 2.1 弱い場展開

平坦時空のまわりで

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

とおきます。

ここで  $h_{\mu\nu}$  が重力場の微小摂動です。

## 2.2 線形化重力

アインシュタイン方程式を  $h_{\mu\nu}$  の1次までで近似すると、線形化方程式が得られます。

便利のために跡反転場

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad h = \eta^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma}$$

を導入します。

ローレンツゲージ

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

を課すと、真空中 ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) では

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

となります。

ここで

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

です。

これは波動方程式です。

## 2.3 平面波解

したがって重力波は平面波として

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = \epsilon_{\mu\nu} e^{-ik \cdot x}$$

と書けます。

ここで

- $\epsilon_{\mu\nu}$  : 偏極テンソル
- $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$

です。

波動方程式より

$$k^\mu k_\mu = 0$$

であり、重力波は質量ゼロです。

## 2.4 横波・TTゲージ

さらに物理自由度だけを残す TTゲージ (transverse-traceless gauge) では

$$h_{0\mu}^{\text{TT}} = 0, \quad \partial_i h_{ij}^{\text{TT}} = 0, \quad h_{ii}^{\text{TT}} = 0$$

となります。

z-方向に進む波なら

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+(t-z/c) & h_\times(t-z/c) & 0 \\ h_\times(t-z/c) & -h_+(t-z/c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と書けます。

ここで

- $h_+$  : プラス偏極
- $h_\times$  : クロス偏極

です。

つまり重力波の物理自由度は2個です。

### 3. 重力場を量子化するとは何か

場の量子論にならって、重力場の微小揺らぎ  $h_{\mu\nu}$  を量子場にしようとする。

$$h_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \hat{h}_{\mu\nu}(x)$$

線形化された真空方程式

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

は、質量ゼロのスピン2場の方程式とみなせます。

したがってモード展開は

$$\hat{h}_{\mu\nu}(x) = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[ \epsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ik \cdot x} + \epsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)*}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ik \cdot x} \right]$$

のように書けます。

交換関係は

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \delta_{\lambda\lambda'}$$

です。

この量子がグラビトンです。

したがって、

弱い場の近似では、重力波を量子化してグラビトンを定義できる。

### 4. それなのに、なぜ「重力は量子化できない」と言われるのか

理由は、相互作用まで含めた完全な量子重力理論を、通常の摂動的量子場理論として作ろうとすると破綻するからです。

核心はくりこみ不可能性にあります。

### 5. 作用から見る重力の非線形性

重力の作用はアインシュタイン・ヒルベルト作用

$$S_{\text{EH}} = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R$$

です。

ここで  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$  とおきます。

通常

$$\kappa = \sqrt{\frac{32\pi G}{c^3}}$$

のような重力結合定数を導入します

(自然単位系  $c = \hbar = 1$  では  $\kappa = \sqrt{32\pi G}$ )。

すると作用は

$$S_{\text{EH}} = \int d^4x \left[ (\partial h)^2 + \kappa h (\partial h)^2 + \kappa^2 h^2 (\partial h)^2 + \dots \right]$$

という無限級数になります。

これが重要です。

電磁場のような線形理論では相互作用の形が比較的単純ですが、重力では

- 重力場自身がエネルギーを持ち
- そのエネルギーがさらに重力源になる

ので、自己相互作用が無限に続きます。

## 6. 次元解析による困難の核心

自然単位系  $\hbar = c = 1$  を用います。

このとき4次元時空で作用は無次元なので

$$[S] = 0$$

であり、ラグランジアン密度の次元は

$$[\mathcal{L}] = 4$$

です。

### 6.1 スカラー場との比較

自由スカラー場では

$$\mathcal{L} \sim \frac{1}{2}(\partial\phi)^2$$

より

$$[\partial] = 1, \quad [\phi] = 1$$

です。

$\phi^4$  相互作用では

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \lambda\phi^4$$

なので

$$[\lambda] = 0$$

です。これは4次元でくりこみ可能です。

### 6.2 重力結合定数の次元

重力作用

$$\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R$$

で、曲率  $R$  は2階微分を含むので

$$[R] = 2$$

です。したがって

$$[G] = -2$$

となります。

つまり

$$[G] = (\text{mass})^{-2}$$

です。

ゆえに

$$[\kappa] = -1$$

です。

これは非常に重要で、結合定数が負の質量次元を持つことを意味します。

## 7. 負の次元を持つ結合定数がなぜ困るか

ループ補正を計算すると、高エネルギーで発散が強くなります。

しかもその発散を吸収するために、元の作用にない高次の項が必要になります。

たとえば量子補正により

$$R^2, \quad R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$$

のような反項が必要になります。

さらに高ループでは

$$R^3, \quad R\nabla^2 R, \quad R^4, \dots$$

と無限個の項が必要になります。

すると、理論を定義するのに無限個の結合定数を実験から決めなければならなくなります。

これは通常の意味での予言能力の喪失です。

したがって

摂動的量子一般相対論は、通常の意味ではくりこみ不可能である。

## 8. ループ展開の見方

重力の有効結合はエネルギースケール  $E$  に対して

$$GE^2$$

で効いてきます。

自然単位系では

$$G = \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2}$$

なので

$$GE^2 = \frac{E^2}{M_{\text{Pl}}^2}$$

です。

ここで

$$M_{\text{Pl}} = \frac{1}{\sqrt{G}}$$

はプランク質量です

( $\hbar = c = 1$ )。

したがって、 $E \ll M_{\text{Pl}}$  では重力は弱く、

$$\frac{E^2}{M_{\text{Pl}}^2} \ll 1$$

なので摂動展開が使えます。

しかし  $E \sim M_{\text{Pl}}$  では

$$\frac{E^2}{M_{\text{Pl}}^2} \sim 1$$

となり、摂動論が崩れます。

これが「低エネルギーでは量子化できるが、超高エネルギーでは破綻する」という意味です。

## 9. 「量子化できない」のより正確な意味

以上をまとめると、

### 9.1 できること

線形化した重力波については

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

を量子化して、グラビトンを導入できる。

### 9.2 困難なこと

完全な非線形重力

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

を、電磁場やYang-Mills場と同じ意味での摂動的量子場理論として完成させることはできない。

つまり

「重力が量子化できない」というより、「一般相対論そのものを通常の摂動的QFTとして完結できない」。

## 10. では今後どうするのか：量子化への方策

ここからが将来への重要部分です。

大きく分けると、いくつかの方針があります。

### 10.1 方策1：有効場理論として扱う

これは現在もっとも堅実な方策です。

一般相対論を、低エネルギー有効理論として扱います。

作用を

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{2}{\kappa^2} R + c_1 R^2 + c_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + c_3 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + \dots \right]$$

のように展開します。

これは

- 低エネルギーではアインシュタイン重力が支配的
- 高次曲率項は小さな補正

と考える方法です。

この立場では、重力の量子補正を秩序よく計算できます。

ただし、これは究極理論ではなく低エネルギー近似です。

### 10.2 方策2：超弦理論

点粒子ではなく、基本対象を1次元の弦に置き換えます。

弦の運動により、粒子スペクトルの中に自然に質量ゼロスピン2粒子が現れます。

これがグラビトンです。

模式的に、閉じた弦の励起として

$$|g_{\mu\nu}\rangle$$

が現れます。

弦の広がリスケール  $\ell_s$  があるため、点粒子理論で起こる短距離発散がやわらげられます。

この立場では、

重力は最初から量子的であり、グラビトンは弦の励起として現れる

と考えます。

長所は、重力とゲージ相互作用を統一的に扱える可能性があることです。  
ただし、4次元低エネルギー世界の一意的導出はまだ難しい問題です。

### 10.3 方策3：ループ量子重力

一般相対論の幾何そのものを非摂動的に量子化しようとする立場です。

計量  $g_{\mu\nu}$  よりも、接続変数と共役変数を使います。

概念的には、面積や体積が離散固有値を持つ演算子になります。

たとえば面積演算子の固有値は模式的に

$$\hat{A}|\Gamma, j_e, \dots\rangle = 8\pi\gamma\ell_P^2 \sum_e \sqrt{j_e(j_e + 1)} |\Gamma, j_e, \dots\rangle$$

のように離散化されます。

ここで

- $\gamma$  : パルベロ・イミルツイ・パラメータ
- $\ell_P$  : プランク長
- $j_e$  : スピンネットワークのラベル

です。

この立場では、

時空幾何そのものが量子的に離散化される

と考えます。

長所は、背景時空に依らない定式化を目指していることです。  
課題は、古典時空や標準模型との接続を十分に明確にすることです。

### 10.4 方策4：漸近的安全性

これは、重力が高エネルギー極限で特別な固定点を持てば、実は非摂動的に意味ある量子理論になるかもしれない、という考えです。

くりこみ群流で重力結合  $g(k)$  が

$$k \frac{dg}{dk} = \beta(g)$$

に従うとし、ある紫外固定点  $g_*$  が存在して

$$\beta(g_*) = 0$$

ならば、有限個のパラメータで高エネルギー極限が定義できる可能性があります。

これはまだ完全に確立された定理ではありませんが、有力な研究方向です。

### 10.5 方策5：その他の方向

ほかに、

- 因果ダイナミカル三角形分割
- ツイスター的手法
- 非可換幾何
- ホログラフィー、AdS/CFT

- 因果集合
- 創発重力

などがあります。

たとえば AdS/CFT では、ある重力理論が境界の量子場理論と等価になると考えます。この立場では、重力を直接量子化する代わりに、

重力を、別の量子理論から再構成する

という発想になります。

## 11. 重力波の量子化とグラビトン

重力波の平面波解

$$h_{\mu\nu}(x) = \epsilon_{\mu\nu} e^{-ik \cdot x}$$

を量子化すると、その1量子はグラビトンです。

グラビトンは

- 質量ゼロ
- スピン2
- 偏極自由度2

をもつと期待されます。

したがって、線形近似では

重力波  $\leftrightarrow$  グラビトンのコヒーレント状態

と考えることができます。

これは電磁波と光子の関係に似ています。

ただし、光子の場合と違って、重力の完全非線形理論全体を量子論として閉じるのが難しい、という違いがあります。

## 12. 数学的な核心を一つの流れでまとめる

重力場：

$$g_{\mu\nu}$$

弱い場展開：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$$

線形化方程式：

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

平面波：

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} e^{-ik \cdot x}$$

量子化：

$$h_{\mu\nu} \rightarrow \hat{h}_{\mu\nu}$$

グラビトン：

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger |0\rangle$$

しかし相互作用を含めると、

$$S_{\text{EH}} = \int d^4x [(\partial h)^2 + \kappa h(\partial h)^2 + \kappa^2 h^2(\partial h)^2 + \dots]$$

かつ

$$[\kappa] = -1, \quad [G] = -2$$

なので、ループ補正で

$$R^2, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R^3, \dots$$

が無限に必要になり、通常の意味での摂動的くりこみ可能性を失います。

### 13. まとめ表1：重力場と重力波

項目	数学的対象	数式	意味
重力場	計量テンソル	$g_{\mu\nu}(x)$	時空の幾何そのもの
重力方程式	アインシュタイン方程式	$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$	物質が時空を曲げる
弱い場展開	計量の摂動	$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$	平坦時空のまわりの小ゆらぎ
重力波方程式	線形化真空方程式	$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$	重力波の波動方程式
平面波解	偏極テンソル付き波	$\bar{h}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} e^{-ik \cdot x}$	質量ゼロスピン2波

### 14. まとめ表2：量子化の困難

段階	数式	内容
1	$h_{\mu\nu} \rightarrow \hat{h}_{\mu\nu}$	線形重力波の量子化は可能
2	$\hat{h}_{\mu\nu} \sim \hat{a} + \hat{a}^\dagger$	グラビトンを定義できる
3	$S_{\text{EH}} = \int [(\partial h)^2 + \kappa h(\partial h)^2 + \dots]$	非線形自己相互作用が現れる
4	$[\kappa] = -1$	結合定数が負の質量次元をもつ
5	$R^2, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R^3, \dots$	無限個の反項が必要になる
6		摂動的くりこみ可能な理論として閉じない

### 15. まとめ表3：今後の方策

方策	基本思想	数学的形	長所	課題
有効場理論	低エネルギー近似として扱う	$R + c_1 R^2 + c_2 R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \dots$	計算可能で堅実	究極理論ではない
超弦理論	点粒子でなく弦を基本とする	グラビトンが閉弦励起として出る	統一性が高い	真空選択などが難しい
ループ量子重力	幾何そのものを非摂動量子化	面積・体積固有値が離散	背景独立性	古典極限との接続
漸近的安全性	UV固定点で定義する	$\beta(g_*) = 0$	非摂動的可能性	完全確立途上
ホログラフィー等	別の量子理論から重力を再構成	境界QFTとの双対性	深い理論的洞察	一般時空への拡張

### 16. 最後の要約

今回の要点を最も簡潔に書くと、

重力波の線形近似は量子化できる

しかし

一般相対論の完全非線形重力を、通常の摂動的QFTとして量子化すると、くりこみ不可能性が現れる

その数学的理由は

$$[G] = (\text{mass})^{-2}$$

すなわち重力結合定数が負の質量次元を持つためです。

したがって今後の方策は、

- 低エネルギーでは **有効場理論**
- 根本理論としては **超弦理論**
- 非摂動的幾何量子化として **ループ量子重力**
- くりこみ群的には **漸近的安全性**
- 双対性・創発として **ホログラフィー**

などになります。

次に続けるなら、

「なぜ重力波がスピン2になるのか」、または

「**アインシュタイン・ヒルベルト作用**を  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$  で展開して、 $(\partial h)^2 + \kappa h(\partial h)^2 + \dots$  が実際にどう出るか」を、数式でさらに詳しく追えます。

📄 📄 📄 📄 📄 ...

最後の質問です。以上において、数学の「フーリエ級数」「フーリエ変換」「ヒルベルト空間」「線形作用素」「固有値」と、物理学の「場の量子力学」「重力理論」「量子化」について理解できました。そこで、その両者の関連をつけて、数学用語をもちいて、段階的に説明してください。まとめの表の作成もお願いします。英治

英治さん、ありがとうございます。

ここまでの内容を受けて、最後に

- 数学の  
フーリエ級数・フーリエ変換・ヒルベルト空間・線形作用素・固有値
- 物理学の  
場の量子論・重力理論・量子化

を、ひとつの流れとして関連づけて、数学用語で段階的に整理します。

結論を先に一言で言えば、今回の両者の関係は

物理学の場とは、ヒルベルト空間や作用素論の上で扱われる関数的対象であり、フーリエ解析によってモード

です。

さらに重力理論では、

重力場は計量テンソルという幾何学的場であり、弱い場ではフーリエ解析と作用素論で他の場と同様に扱

## 1. 全体的見取り図

まず、今回の数学と物理の対応を最も大きな流れで書くと、

数 → 関数 → 関数空間 → ヒルベルト空間 → フーリエ分解 → 作用素 → 固有値 → 量子化 → 粒子・重力波

です。

より物理寄りに書くと、

場  $\Phi(x)$  → 平面波展開 → モード → 生成消滅演算子 → フォック空間

です。

つまり、数学では「関数解析」として見えていた構造が、物理では「場の量子論」そのものになっています。

## 2. 実数・複素数から場へ

### 2.1 数の体系

数学の出発点は、実数体  $\mathbb{R}$  と複素数体  $\mathbb{C}$  でした。

- 実数：長さ・時間・座標
- 複素数：振動・波・位相

特に波動現象では複素指数関数

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

が基本になります。

### 2.2 場の値域

物理学の場は、時空点  $x$  に値を対応させる写像でした。

- スカラー場

$$\phi : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R} \text{ または } \mathbb{C}$$

- ベクトル場

$$A^\mu : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$$

- スピノル場

$$\psi : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{C}^4$$

- 重力場

$$g_{\mu\nu} : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \text{対称テンソル}$$

です。

したがって場とは、数学的には「関数」または「断面」の一種です。

## 3. 関数空間とヒルベルト空間

### 3.1 関数をベクトルとみなす

数学では、関数  $f(x)$  を単なる式ではなく、ベクトル空間の元とみなしました。

たとえば

$$L^2(\mathbb{R}^3) = \left\{ f \mid \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{x})|^2 d^3x < \infty \right\}$$

は二乗可積分関数の空間です。

### 3.2 ヒルベルト空間

この空間には内積

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d^3x$$

を入れることができます。

すると  $L^2$  はヒルベルト空間になります。

量子力学では、状態はヒルベルト空間のベクトル

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$$

で表されます。

場の量子論では、1粒子状態の空間  $\mathcal{H}_1$  から、さらに多粒子状態を含む **フォック空間**

$$\mathcal{F} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H}_1 \oplus (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1)_{\pm} \oplus \dots$$

が現れます。

### 3.3 物理との対応

したがって、

- 数学のヒルベルト空間  
→ 状態の空間
- 数学の内積  
→ 遷移振幅・確率振幅の基礎
- 完備性  
→ 展開と収束の保証

という対応になります。

## 4. フーリエ級数・フーリエ変換と場のモード分解

### 4.1 数学での意味

フーリエ級数は周期関数を

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

と展開する理論でした。

フーリエ変換は非周期関数を

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

で周波数空間へ移す理論でした。

### 4.2 物理での意味

場の量子論では、場  $\Phi(x)$  は平面波で展開されます。

スカラー場なら

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + a^*(\mathbf{p})e^{ip \cdot x})$$

重力波なら

$$h_{\mu\nu}(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\epsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)} a_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ik \cdot x} + \epsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)*} a_{\mathbf{k},\lambda}^* e^{ik \cdot x})$$

です。

これはまさにフーリエ変換です。

### 4.3 意味の統一

数学ではフーリエ変換は

位置表示  $\leftrightarrow$  周波数表示

でしたが、物理では

位置空間  $\leftrightarrow$  運動量空間

になります。

なぜなら

$$p^\mu = \hbar k^\mu$$

だからです。

したがって、場の「平面波表示」とは、数学的にはフーリエ解析であり、物理的には運動量固有モード分解です。

## 5. 線形作用素と場の方程式

### 5.1 数学の線形作用素

数学では、関数空間上の線形作用素

$$T: H \rightarrow H$$

を考えました。

代表例は

- 微分作用素

$$D = \frac{d}{dx}$$

- ラプラス作用素

$$\Delta = \nabla^2$$

- ダランベール作用素

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu$$

です。

### 5.2 物理では運動方程式になる

物理の自由場方程式は、ほとんどが線形作用素方程式です。

- スカラー場

$$(\square + m^2)\phi = 0$$

- ベクトル場

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

- スピノール場

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

- 重力波（線形化）

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

です。

つまり、物理学の運動方程式は、数学的には「関数空間上の微分作用素の方程式」です。

## 6. 固有値問題と物理量

### 6.1 数学の固有値

数学では

$$T\psi = \lambda\psi$$

を固有値問題と呼びました。

これは「作用素をかけても方向は変わらず、倍率だけ変わる」ベクトルを探す問題です。

## 6.2 量子力学・場の量子論での意味

量子論では物理量は作用素で表され、観測値は固有値として現れます。

たとえば運動量演算子

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

に対して

$$\hat{p} e^{ikx} = \hbar k e^{ikx}$$

です。

したがって平面波  $e^{ikx}$  は運動量演算子の固有関数であり、固有値は

$$p = \hbar k$$

です。

エネルギーについても

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

が成り立ちます。

## 6.3 場における意味

場のモード展開で現れる平面波

$$e^{-ip \cdot x}$$

は、運動量の固有モードです。

したがってフーリエ展開の係数は、単なる解析的係数ではなく、物理的には「どの運動量の粒子成分がどれだけあるか」を表しています。

## 7. 量子化とは何か

### 7.1 数学的に言うと

量子化とは、古典的な可換な変数や関数を、非可換な作用素へ移す操作です。

模式的には

$$q, p \longrightarrow \hat{q}, \hat{p}$$

であり、

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

を課します。

### 7.2 場の量子化

場の量子論では、古典場

$$\phi(x)$$

を作用素値場

$$\hat{\phi}(x)$$

へ移します。

フーリエ係数

$$a(\mathbf{p}), a^*(\mathbf{p})$$

は演算子

$$\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$$

に置き換えられます。

すると

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\hat{a}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})e^{ip \cdot x})$$

となります。

ここで

- $\hat{a}^\dagger$  : 生成演算子
- $\hat{a}$  : 消滅演算子

です。

### 7.3 各モードは調和振動子

フーリエ分解すると、自由場の各運動量モードは独立な調和振動子になります。

たとえば自由スカラー場のハミルトニアンは模式的に

$$H = \int d^3p \omega_{\mathbf{p}} \left( \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \right)$$

となります。

したがって、

$$\boxed{\text{場の量子化} = \text{無限個の調和振動子の量子化}}$$

です。

これは数学のフーリエ分解と量子力学の作用素論が結びついた姿です。

## 8. 場の種類と数学構造

### 8.1 スカラー場

スカラー場は、ローレンツ群の自明表現に従います。

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

平面波展開でき、量子化するとボソンが現れます。

### 8.2 ベクトル場

ベクトル場は4元ベクトル表現に従います。

$$A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(x)$$

平面波展開では偏極ベクトル  $\epsilon^{\mu}$  が付きます。

### 8.3 スピノル場

スピノル場はスピノル表現に従います。

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$$

平面波展開ではスピノル  $u_s(p), v_s(p)$  が付き、量子化には反交換関係が必要です。

## 8.4 重力場

重力場は対称2階テンソル場

$$g_{\mu\nu}(x)$$

です。

弱い場では

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

と分解でき、 $h_{\mu\nu}$  は質量ゼロスピン2場として扱えます。

このとき

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

となり、重力波も平面波展開できます。

したがって、弱い場では重力場もまたフーリエ解析の対象です。

---

## 9. 重力理論と他の場との違い

ここが重要な点です。

### 9.1 通常の場合

スカラー場、電磁場、スピノル場では、背景時空を固定してその上の場を量子化できます。

つまり

固定された時空 + その上の場

です。

---

### 9.2 重力場

重力では、場そのものが時空の幾何を与えます。

$$g_{\mu\nu}$$

は単なる「時空の上の場」ではなく、「時空構造そのもの」です。

したがって重力の量子化は、

場を量子化する

だけでなく、

時空幾何そのものを量子化する

問題になります。

これが難しさの根本です。

---

### 9.3 数学的困難

弱い場では

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$$

として  $h_{\mu\nu}$  を量子場にできます。

しかし完全理論では、作用

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R$$

を展開すると

$$(\partial h)^2 + \kappa h(\partial h)^2 + \kappa^2 h^2(\partial h)^2 + \dots$$

となり、無限の自己相互作用が出てきます。

しかも

$$[G] = (\text{mass})^{-2}$$

なので、通常の摂動的量子場理論としてはくりこみがうまく閉じません。

## 10. 数学と物理の対応を一段高くまとめる

ここまでの抽象的にまとめると、数学と物理は次のように対応します。

### 10.1 フーリエ解析

数学：

$$f(x) = \int \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$$

物理：

$$\Phi(x) = \int a(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} d^3p + \text{h.c.}$$

意味：

場を運動量モードに分解する。

### 10.2 ヒルベルト空間

数学：

$$L^2, \ell^2, \text{完備内積空間}$$

物理：

$$\mathcal{H}, \mathcal{F}$$

意味：

状態・粒子数状態の空間を与える。

### 10.3 線形作用素

数学：

$$T : H \rightarrow H$$

物理：

$$\hat{H}, \hat{P}, \hat{\phi}(x), \hat{a}, \hat{a}^\dagger$$

意味：

観測量や場の作用を表す。

### 10.4 固有値

数学：

$$T\psi = \lambda\psi$$

物理：

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad \hat{P}^\mu|p\rangle = p^\mu|p\rangle$$

意味：

観測されるエネルギー・運動量・粒子数。

## 10.5 量子化

数学的変換：

可換代数  $\rightarrow$  非可換作用素代数

物理的意味：

古典場を量子場へ上げる。

## 11. 段階的まとめ

以下、今回の両者の関連を段階的に整理します。

### 第1段階：関数としての場

場は時空点に値を対応させる関数である。

$$x \mapsto \Phi(x)$$

### 第2段階：関数空間

場全体はベクトル空間を作る。

$$\Phi, \Psi \in V$$

### 第3段階：ヒルベルト空間構造

内積を入れると直交性・展開・ノルムが定まる。

$$\langle \Phi, \Psi \rangle$$

### 第4段階：フーリエ分解

場を平面波基底で展開する。

$$\Phi(x) = \int \tilde{\Phi}(p) e^{-ip \cdot x} dp$$

### 第5段階：作用素方程式

運動方程式は微分作用素の方程式になる。

$$\mathcal{D}\Phi = 0$$

### 第6段階：固有値

平面波は運動量作用素の固有関数になる。

$$\hat{P}^\mu e^{-ipx} = p^\mu e^{-ipx}$$

### 第7段階：量子化

モード係数を作用素に置き換える。

$$\tilde{\Phi}(p) \rightarrow \hat{a}(p), \hat{a}^\dagger(p)$$

### 第8段階：粒子解釈

生成演算子が粒子状態を作る。

$$|p\rangle = \hat{a}^\dagger(p)|0\rangle$$

### 第9段階：重力への拡張

重力場も弱い場では

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \hat{h}_{\mu\nu}$$

として平面波展開・量子化できる。

### 第10段階：量子重力の困難

しかし重力は時空幾何そのものであり、非線形相互作用が強く、通常の摂動量子化が破綻する。

## 12. まとめ表

### 12.1 数学と物理の基本対応表

数学の概念	数式	物理の対応	物理での意味
実数・複素数	$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	場の値・波の位相	波動と振動の基本
関数空間	$f: X \rightarrow \mathbb{C}$	場 $\Phi(x)$	時空上の物理量
ベクトル空間	$af + bg$	場の重ね合わせ	重ね合わせ原理
内積	$\langle f, g \rangle$	状態の重なり	確率振幅の基礎
ヒルベルト空間	完備内積空間 $H$	量子状態空間 $\mathcal{H}$	量子状態を入れる空間

### 12.2 フーリエ解析と場の量子論の対応表

数学	数式	物理	数式
フーリエ級数	$f(x) = \sum_n c_n e^{inx}$	離散モード展開	有限箱中の場の展開
フーリエ変換	$\hat{f}(k) = \int f(x) e^{-ikx} dx$	運動量空間表示	$\Phi(x) \leftrightarrow \tilde{\Phi}(p)$
基底関数	$e^{ikx}$	平面波	$e^{-ipx}$
直交性	$\langle e^{ikx}, e^{iqx} \rangle \propto \delta(k - q)$	モードの独立性	各運動量モードが独立
係数	$\hat{f}(k)$	モード振幅	$a(\mathbf{p})$

### 12.3 作用素と固有値の対応表

数学の概念	数式	物理の対応	意味
線形作用素	$T: H \rightarrow H$	ハミルトニアン $\hat{H}$ 、運動量 $\hat{P}$	観測量
微分作用素	$\partial_\mu, \square$	場の運動方程式	自由場の時間発展
固有値問題	$T\psi = \lambda\psi$	$\hat{H}\psi = E\psi$	観測値
平面波固有関数	$\hat{p} e^{ikx} = \hbar k e^{ikx}$	運動量固有状態	粒子モード
スペクトル	$\sigma(T)$	エネルギー準位・連続運動量	物理状態の分類

### 12.4 場の種類と量子化の対応表

場	数学的型	自由方程式	フーリエモード	量子化後
スカラー場 $\phi$	スカラー値関数	$(\square + m^2)\phi = 0$	$e^{-ipx}$	ボソン生成消滅演算子
ベクトル場 $A^\mu$	ベクトル値関数	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$	$e^\mu e^{-ipx}$	光子など
スピノール場 $\psi$	スピノール値関数	$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$	$u(p)e^{-ipx}, v(p)e^{ipx}$	フェルミオン
重力場 $h_{\mu\nu}$	対称2階テンソル場	$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$	$\epsilon_{\mu\nu} e^{-ikx}$	グラビトン (線形近似)

### 12.5 重力理論との対応表

数学の概念	重力理論での対象	数式	意味
幾何学的場	計量テンソル	$g_{\mu\nu}$	重力場そのもの
線形化	摂動場	$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$	弱い重力場
波動方程式	重力波	$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$	重力波の伝播
平面波	重力波モード	$\epsilon_{\mu\nu} e^{-ikx}$	質量ゼロスピン2
量子化	グラビトン	$h_{\mu\nu} \rightarrow \hat{h}_{\mu\nu}$	弱い場での量子重力
非線形作用素構造	自己相互作用	$(\partial h)^2 + \kappa h(\partial h)^2 + \dots$	完全量子化の困難

### 13. 最終的な結論

今回の両者の関連を、最も本質的にまとめると次の3点になります。

#### 結論1

フーリエ級数・フーリエ変換 は、場を平面波モードへ分解する数学である。

$$\Phi(x) \longleftrightarrow \tilde{\Phi}(p)$$

#### 結論2

ヒルベルト空間・線形作用素・固有値 は、量子状態・観測量・測定値を与える数学である。

$$\hat{A}\psi = \lambda\psi$$

#### 結論3

場の量子化 とは、フーリエ分解された各モードを作用素化し、無限個の調和振動子として扱うことである。

$$a(\mathbf{p}) \rightarrow \hat{a}(\mathbf{p}), \quad a^*(\mathbf{p}) \rightarrow \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$$

そして重力理論では、この構造が弱い重力場では成り立つが、完全な非線形重力場では時空幾何そのものの量子化に進むため、通常の場合の量子論より深い困難が現れます。

### 14. 最後の一行まとめ

今回の全体を一行でまとめると、

数学のフーリエ解析とヒルベルト空間の理論は、物理学の場のモード分解・量子化・粒子解釈の基礎そのもの

英治さん、望まれれば次に、この全体をさらに整理して

「数学 → 量子力学 → 場の量子論 → 重力理論 → 量子重力」

という1枚の総合対応マップとして、表形式でさらに大きくまとめることもできます。

📄 📌 🗑️ 🔄 ⋮

すばらしいです。こんかにも物理学と数学の関連についての理解を深めることができました。

ありがとうございます、英治さん。

今回も、数学と物理学のつながりをとても深く整理できました。

特に今回は、

フーリエ解析 → ヒルベルト空間 → 作用素と固有値 → 場のモード分解 → 量子化 → 重力場と

という大きな流れが、ひとつの体系として見えてきたと思います。

英治さんが継続して探究されている  
「数学的構造が、どのように物理理論の骨格になっているか」  
という点が、今回も非常にはっきり表れました。

またいつでも、次はたとえば

- フーリエ変換と運動量表示の厳密な関係
- 作用素のスペクトル分解と量子論
- フォック空間の構成
- 一般相対論の作用原理
- 量子重力の各理論の比較

などへ進めます。

今回もありがとうございました。

📄 👍 🗨️ 📌 🔄 …