

シンメトリーと保存則 (I)

北島英治 (2026年2月)

物理学と数学の関連についての理解を深めていきたい。今回、数学における「対称性 (symmetry)」と物理学における「保存則」の関連について理解したい。最初の質問です。数学である「幾何学」、数学的構造における「代数 (群)」と「位相」、「解析学」、「圏論」、「表現論」のそれぞれにおいて、「対称性」についてどのゆに説明し定義しているか、集合論や数学的用語を用いて段階的に示してください。そしてのまとめの表を作成してください。英治

英治さん、とても良いテーマです。

「対称性 (symmetry)」は数学と物理を結ぶ中核概念であり、後に出てくる物理の**保存則 (Noetherの定理)**へと直接つながります。今回はまず、**純粋に数学側から見た対称性**を、集合論と言語・構造のレベルから段階的に整理します。

流れは次の順で行きます：

集合 → 構造 → 構造保存写像 → 自己同型 → 群 → 対称性

✔️ 0 対称性の最も一般的な数学的定義 (出発点)

集合論ベースでの最も抽象的定義：

対称性 = 構造を保つ自己写像の全体

数学的に：

- 対象：構造付き集合

(X, S)

- 構造保存写像：

$f: X \rightarrow X$

- 条件：
 - 全単射 (bijection)
 - 構造を保存

このような写像を：

自己同型 (automorphism)

と呼びます。

そして：

Symmetry group = $\text{Aut}(X, S)$

が対称性の数学的定義になります。

1 幾何学における対称性

■ 対象

幾何空間：

$$(X, d), (M, g), (\mathbb{R}^n, \text{metric})$$

■ 対称性の定義

距離・角度・曲率などを保つ変換

例：

ユークリッド空間

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

条件：

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

これを：

等長変換 (isometry)

という。

幾何の対称性群

$$\text{Isom}(X)$$

■ 幾何的対称性の本質

保存されるもの：

- 距離
- 角度
- 計量テンソル
- 曲率構造

2 代数（群論）における対称性

ここが「対称性の中心理論」です。

■ 定義

群作用：

$$G \sim X$$

作用：

$$G \times X \rightarrow X$$

条件：

$$g(hx) = (gh)x$$

■ 対称性とは

ある対象に作用する群そのもの

例：

- 正多面体の回転群
- 行列群
- 置換群

■ 自己同型群

代数構造：

$$(A, \cdot)$$

対称性：

$$\text{Aut}(A)$$

3 位相における対称性

■ 対象

位相空間：

$$(X, \tau)$$

■ 対称性

位相を保つ全単射：

$$f: X \rightarrow X$$

条件：

$$f, f^{-1} \text{ が連続}$$

これを：

同相写像 (homeomorphism)

という。

■ 位相的対称性群

$\text{Homeo}(X)$

■ 保存される構造

- 開集合構造
- 連結性
- コンパクト性
- 次元

※距離や角度は保存しない

4 解析学における対称性

解析では：

微分構造・方程式・作用素の不変性

が対称性になります。

■ 対象

- 微分方程式
- 作用素
- 関数空間

■ 対称性定義

作用素 L に対して：

$$T^{-1}LT = L$$

なら：

T は対称変換

■ 微分方程式の対称性

$$F(x, u, Du, \dots) = 0$$

変換後も同じ式：

$$F(f(x), u', Du', \dots) = 0$$

5 圏論における対称性

圏論では非常に抽象化されます。

■ 対称性の定義

対象の自己同型射

圏：

\mathcal{C}

対象 X の対称性：

$$\text{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$$

■ 対称モノイド圏

圏全体の対称性：

$$X \otimes Y \cong Y \otimes X$$

これを：

対称モノイド圏

という。

■ 自然変換による対称性

関手間の自然同型：

$$F \Rightarrow F$$

も圏論的対称性。

6 表現論における対称性

表現論では：

対称性群を線形変換として実現する

■ 定義

群表現：

$$\rho: G \rightarrow GL(V)$$

群の対称性が：

線形作用

として表される。

■ 対称性の解析

- 不変部分空間
- 既約表現
- 指標
- 分解定理

✓ 最終まとめ表

分野	対象	対称性の定義	保存される構造	対称性群
幾何学	距離空間・多様体	等長変換	距離・角度	$\text{Isom}(X)$
群論	代数構造	群作用	演算構造	G
位相	位相空間	同相写像	開集合構造	$\text{Homeo}(X)$
解析	方程式・作用素	共役不変性	微分構造	作用素群
圏論	対象	自己同型射	射構造	$\text{Aut}(X)$
表現論	ベクトル空間	線形表現	線形構造	$\rho(G)$

◆ 次回予告（物理との接続）

ここまでが数学側の基礎です。

次の段階では：

対称性 → 群作用 → ラグランジアン不変 → 保存量

つまり：

Noetherの定理

へ接続します。

もしよろしければ次は：

「物理における対称性 → 保存則 → Noether電流」

を数学式で段階的に示しましょう。

第2の質問です。物理学である古典力学における「エネルギー」、「運動量」、「角運動量」、「ラグランジアン」、「ハミルトニアン」、「相対性理論」を基盤とする「場の理論」における「ラグランジアン密度」と「ハミルトニアン」について、「保存則」をどのように説明し定義しているか、数学用語や数式を用いて段階的に示してください。そしてのまとめの表を作成してください。

了解です、英治さん。ここでは「保存則」＝「作用（action）の対称性」という一本の筋で、古典力学（粒子系）→ 相対論的場の理論（連続体）へ段階的に整理します。

0 保存則の“定義”の核：作用の不変性

物理での最も根本的な出発点は

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

$$\text{(場なら } S[\phi] = \int L(\phi, \partial_\mu \phi, x) d^4x \text{)}$$

です。

- 運動方程式は「変分原理」

$$\delta S = 0$$

から出ます（オイラー＝ラグランジュ方程式）。

- 保存則は「作用が連続変換で不変（対称）」のときに out (Noether)。

1 古典力学（粒子系）：ラグランジアン形式での保存則

1.1 オイラー＝ラグランジュ方程式

一般化座標 q_i に対して

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

ここで

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

を**共役運動量（一般化運動量）**と定義します。

1.2 エネルギー保存 (時間並進対称性)

もしラグランジアンが時間に陽に依存しない ($\partial L/\partial t = 0$) なら、

$$E := \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$$

が保存されます :

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

この E は、ハミルトニアンと一致します (後述)。

意味 : 時間並進対称性 $t \mapsto t + \epsilon$ がある \rightarrow エネルギー保存。

1.3 運動量保存 (空間並進対称性)

デカルト座標 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を考え、

$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ が $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{a}$ で不変

なら、各成分の運動量

$$\mathbf{p} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$$

が保存 :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$$

(中心力などで系全体が並進対称なら全運動量保存。)

1.4 角運動量保存 (回転対称性)

$$\mathbf{r} \mapsto R\mathbf{r} \quad (R \in SO(3))$$

で L が不変なら、角運動量

$$\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

が保存 :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

2 ハミルトニアン形式：保存則の見え方

2.1 ルジャンドル変換とハミルトニアン

共役運動量 $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ を使い

$$H(q, p, t) := \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)$$

(\dot{q} は p で解いて代入)

2.2 ハミルトン方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

2.3 保存則 (時間依存が無いとき)

もし $\partial H / \partial t = 0$ なら

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

つまりハミルトニアンは保存量 (= エネルギー) になります。

さらに一般に、任意の物理量 $F(q, p, t)$ について

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

(ポアソン括弧 $\{\cdot, \cdot\}$) なので、

- $\partial F / \partial t = 0$ かつ $\{F, H\} = 0$ なら F は保存量。

対称性 $\Leftrightarrow \{F, H\} = 0$ (生成子としての保存量) という見え方になります。

3 相対性理論を基盤とする「場の理論」：ラグランジアン密度と保存則

ここから粒子ではなく場 $\phi_a(x)$ (複数成分でもOK) です。座標は

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

3.1 作用とラグランジアン密度

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a, x)$$

3.2 場のオイラー＝ラグランジュ方程式

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0$$

4 Noetherの定理（場）：保存“電流”としての定式化

連続対称変換（内部対称性でも時空対称性でも）で作用が不変なら、

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

を満たす Noether電流 j^μ が存在し、

$$Q = \int d^3x j^0$$

が時間保存されます（境界条件が良いとき）：

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

5 時空並進対称性 → エネルギー・運動量保存（エネルギー運動量テンソル）

もし L が座標 x^μ に陽に依存しない（時空並進対称）なら、

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

という保存則が得られます。ここで（代表的に“正準”テンソル）

$$T^{\mu\nu} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial^\nu \phi_a - \eta^{\mu\nu} L$$

$\eta^{\mu\nu}$ はミンコフスキー計量。

保存される4運動量：

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu}$$

- $\nu = 0$: 全エネルギー
- $\nu = i$: 全運動量の各成分

6 ローレンツ対称性 → 角運動量（角運動量テンソル）保存

ローレンツ変換（回転+ブースト）に対して不変なら、

$$\partial_\mu J^{\mu\alpha\beta} = 0$$

で、代表形は

$$J^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} + (\text{spin項})$$

粒子力学の $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ の相対論版 (+スピン) です。

7 場のハミルトニアン：ハミルトニアン密度と保存

場の共役運動量密度 (場の“正準運動量”) を

$$\pi_a(x) := \frac{\partial L}{\partial(\partial_0\phi_a)}$$

と定義し、ハミルトニアン密度を

$$H := \sum_a \pi_a \partial_0\phi_a - L$$

全ハミルトニアン (全エネルギー) は

$$H = \int d^3x H$$

時間並進対称性 ($\partial L/\partial t = 0$) が成り立つなら

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

が成立します (適切な境界条件の下)。

✓ まとめ表 (粒子系 ↔ 場)

理論枠組み	“不変性 (対称性)” の対象	保存則の数学的形	保存量 (代表)	定義式 (代表)
古典力学 (ラグランジュ)	$L(q, \dot{q}, t)$ が連続変換で不変	$\frac{d}{dt}(\cdot) = 0$	エネルギー E	$E = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$
古典力学 (ラグランジュ)	空間並進不変	$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$	運動量 \mathbf{p}	$\mathbf{p} = \partial L/\partial \dot{\mathbf{r}}$
古典力学 (ラグランジュ)	回転不変	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$	角運動量 \mathbf{L}	$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
古典力学 (ハミルトン)	H の時間独立	$\frac{dH}{dt} = 0$	ハミルトニアン H	$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$
場の理論 (相対論)	L の内部対称性	$\partial_\mu j^\mu = 0$	Noether電荷 Q	$Q = \int d^3x j^0$

理論枠組み	“不変性 (対称性) ” の対象	保存則の数学的形	保存量 (代 表)	定義式 (代表)
場の理論 (相 対論)	時空並進不変	$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$	4運動量 P^ν	$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu}$
場の理論 (相 対論)	ロ-レンツ不変	$\partial_\mu J^{\mu\alpha\beta} = 0$	角運動量テ ンソル	$J^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha}$
場の理論 (ハ ミルトン)	時間並進不変	$\frac{dH}{dt} = 0$	全エネルギー H	$H = \int d^3x (\sum_a \pi_a \dot{\phi}_a)$

もし次へ進めるなら、英治さんの狙い (「対称性→保存則」) に直結する形で、

- 「粒子のNoether定理」 (δq_i と全微分の形で導出)
- 「場のNoether定理」 ($\delta\phi$ と δx^μ を含む一般形)
- エネルギー-運動量テンソルの“正準”と“対称化 (Belinfante)”の違い

を、式変形を追えるように段階的に導出できます。

第3の質問です。以上説明された数学と物理学における「対称性」において、それぞれの関連性について段階的に説明してください。そのまとめた表を作成してください。

英治さん、とてもよい第3段階の質問です。ここでいよいよ、

数学における対称性（構造保存） → 物理学における対称性（作用不変） → 保存則

という対応関係を、集合論・群論・幾何・解析・圏論の言葉から、古典力学・場の理論へと段階的に橋渡しして整理します。

ポイントは一つに集約されます：

数学：自己同型（構造保存） \Leftrightarrow 物理：作用不変 \Rightarrow 保存則

✓ 第0段階：共通の抽象骨格（数学と物理の共通形式）

まず最も抽象的な共通構造です。

■ 数学側

構造付き集合：

$$(X, S)$$

対称性：

$$\text{Aut}(X, S)$$

（構造保存自己同型群）

■ 物理側

物理理論：

- 配置空間／場の空間： C
- 作用：

$$S : C \rightarrow \mathbb{R}$$

対称性：

$$S[\Phi] = S[g \cdot \Phi]$$

つまり

作用汎関数の不変性

✓ 第1段階：群論的対称性 → 物理変換

■ 数学（群作用）

群作用：

$$G \curvearrowright X$$
$$g: X \rightarrow X$$

■ 物理（変換群）

同じ形式：

数学	物理
群 G	対称変換群
群作用	座標変換・場変換
軌道	同値な物理状態

■ 例

群	数学的意味	物理的意味
$SO(3)$	回転群	角運動量保存
\mathbb{R}^3 並進群	並進	運動量保存
\mathbb{R} 時間並進	1次元群	エネルギー保存

✓ 第2段階：幾何学的対称性 → 保存量

■ 数学（幾何）

等長変換：

$$f^*g = g$$

（計量テンソル保存）

■ 物理 (ラグランジアン)

ラグランジアン :

$$L = T - V$$

が不変 :

$$L(q, \dot{q}) = L(gq, g\dot{q})$$

■ 結果

幾何対称性

↓

ラグランジアン不変

↓

Noether保存量

✓ 第3段階 : 解析学・変分法 → 運動方程式

■ 数学 (変分問題)

$$\delta S = 0$$

■ 物理 (作用原理)

- オイラー＝ラグランジュ方程式
- ハミルトン方程式

■ 対称性の解析学的定義

変換 T が :

$$T^{-1} L T = L$$

作用素不変性

= 方程式の対称性

= 保存量の存在

✓ 第4段階 : Noether定理 (数学→物理の橋)

■ 数学形式

連続群：

$$G = \exp(\epsilon X)$$

(Lie群と生成子)

■ 物理形式

連続変換：

$$\delta q = \epsilon X(q)$$

作用不変：

$$\delta S = 0$$

■ 結果 (Noether)

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

または場で：

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

✓ 第5段階：表現論 → 粒子・場の分類

■ 数学

表現：

$$\rho: G \rightarrow GL(V)$$

■ 物理

対称群の表現が：

- 粒子の種類
- スピン
- 内部量子数

を決める。

例：

群	表現	物理量
SO(3)	既約表現	スピン
Poincaré群	ユニタリ表現	質量・スピン
SU(3)	表現	クォーク色

✓ 第6段階：圏論的視点（最も抽象）

■ 数学

対称性：

$$\text{Aut}_C(X)$$

■ 物理

物理理論を：

- 対象：状態空間
- 射：時間発展・対称変換

とみなすと：

対称性 = 自己同型射

Noether対応：

対称変換関手 → 保存量関手

と見ることもできる。

✓ 第7段階：時空対称性 → 保存テンソル（場の理論）

■ 数学

微分幾何：

- 多様体
- Lie微分
- Killingベクトル場

■ 物理

Killingベクトル場 X^μ

$$L_X g_{\mu\nu} = 0$$

↓

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

↓

保存量：

$$Q = \int T^{0\nu} X_\nu d^3x$$

✓ 総合まとめ表（数学 ↔ 物理 対称性対応表）

数学分野	数学的対称性の定義	数学的対象	物理対応	物理保存量
集合・構造	自己同型 $\text{Aut}(X)$	構造保存写像	状態空間の変換	保存量
群論	群作用 $G \curvearrowright X$	Lie群	対称変換群	Noether量
幾何	等長変換	計量保存	ラグランジアン不変	エネルギー・角運動量
位相	同相写像	位相構造	位相的位相相	トポロジカル量
解析	作用素不変	微分方程式	運動方程式対称性	積分不変量
変分法	汎関数不変	作用 S	Noether定理	保存電流
表現論	群表現	線形空間	粒子分類	スピン・電荷
微分幾何	Killing場	多様体	時空対称性	エネルギー運動量
圏論	自己同型射	圏	理論の同値性	保存量対応

◆ 一行で核心を言うと

英治さんのテーマを数式でまとめると：

$$\boxed{\text{数学：自己同型群} \Rightarrow \text{物理：作用不変} \Rightarrow \text{Noether保存量}}$$

もし次に進むなら：

- ✓ Noether定理の完全導出
- ✓ Killingベクトルと保存量の厳密証明
- ✓ 標準模型の対称群と保存電荷
- ✓ 圏論的Noether対応

まで一気に体系化できます。どこまで掘り下げましょうか。

数学における「対称性」と物理学における「保存則」の関連が、非常に明快に整理されています。今回も、物理学と数学の関連についての理解を、より深めることができました。今回は、ここまでにしておきます。ありがとうございました。英治

英治さん、こちらこそ今回もとても本質的で美しいテーマをご一緒できて嬉しかったです。

今回の流れを一行でまとめると：

数学の対称性（自己同型・群作用） ⇒ 作用の不変性 ⇒ 物理の保存則（Noeth

という対応関係が、

幾何・群論・解析・表現論・圏論から、

古典力学・ハミルトン形式・相対論的場の理論まで、一本の軸でつながりました。

英治さんのこれまでの関心（群論・場の理論・表現論・幾何・圏論・超対称性）とも非常に自然に接続していますので、次回はもしご希望があれば：

- Noether定理の完全導出（粒子系 + 場）
- Killingベクトルと保存量
- ゲージ対称性と保存電荷
- 表現論による保存量の分類
- 圏論的に見た物理法則の不変性

まで発展させることもできます。

今回も丁寧に対話してくださってありがとうございました。

また続きをいつでもご一緒しましょう。