

「物理学と数学の関連」について、今回は、数学と物理学の「記法」の関連を整理しておきたい。第1の質問です。数学である「スカラー」「ベクトル」「マトリクス」「テンソル」「スピノール」の「代数（離散群、連続群（リー群）、環、体、位相）」「解析（微分、積分、実数解析、複素数解析、関数解析）」「多様体」「ファイバー・バンドル」「幾何学（代数幾何学、位相幾何学、微分位相幾何学）」についての「記法」としての記号、数式、代数方程式、関数方程式（微分方程式、積分方程式、汎関数方程式）を列挙して、段階的に説明して、そのまとめの表を作成してください。英治



第1問 数学と物理学における「記法」の体系

英治さん、今回は、数学的対象を

スカラー → ベクトル → 行列 → テンソル → スピノール

という段階で整理し、それらが

代数・解析・多様体・ファイバー束・幾何学

の中で、どのような記号・方程式として表されるかを体系化します。

0. 記法を理解するための基本原則

数学・物理学では、同じ文字でも、その「属する空間」と「添字」によって意味が変わります。

たとえば、

$\phi, \quad v^i, \quad A^i_j, \quad T^{ij}_k, \quad \psi^\alpha$

は、それぞれ次の対象を表します。

対象	典型的記法	成分数	変換の特徴
スカラー	ϕ	1	座標変換で値が不変
ベクトル	v^i	n	変換行列を1回受ける
行列・線形写像	A^i_j	n^2	入力添字と出力添字をもつ
テンソル	$T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$	n^{r+s}	複数の変換行列を受ける

対象	典型的記法	成分数	変換の特徴
スピノール	ψ^α	表現に依存	回転群の二重被覆の表現

上付き添字と下付き添字は、基本的には

$$v^i \in V, \quad \omega_i \in V^*$$

のように、ベクトル空間 V と双対空間 V^* の違いを表します。

第1段階 スカラーの記法

1.1 スカラーの定義

スカラーは、一般に体 $\mathbb{K}$ の元です。

$$a \in \mathbb{K}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

実数スカラーなら

$$a \in \mathbb{R},$$

複素数スカラーなら

$$z \in \mathbb{C}, \quad z = x + iy, \quad i^2 = -1$$

と書きます。

物理学では、位置に依存するスカラーをスカラー場と呼びます。

$$\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

または複素スカラー場なら

$$\phi : M \longrightarrow \mathbb{C}.$$

ここで M は空間または時空多様体です。

1.2 スカラーの代数記法

加法・乗法

$$a + b, \quad ab, \quad a^{-1}, \quad a^n$$

多項式方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

例：

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

群としての記法

加法群：

$$(\mathbb{R}, +)$$

乗法群：

$$(\mathbb{R}^\times, \cdot), \quad \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

複素位相の群：

$$U(1) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

群作用は

$$\phi \mapsto e^{i\theta} \phi$$

と書きます。

1.3 スカラーの解析記法

微分

$$\frac{df}{dx}, \quad f'(x), \quad \partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}.$$

積分

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_M \phi d\mu.$$

常微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y)$$

または

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

偏微分方程式

波動方程式：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \phi = 0.$$

クライン=ゴールドン方程式：

$$(\square + m^2) \phi = 0,$$

ただし

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu.$$

積分方程式

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int K(x, y) \phi(y) dy.$$

ここで $K(x, y)$ は積分核です。

汎関数

関数 ϕ を入力として数を返す写像を

$$S[\phi]$$

と書きます。

例：

$$S[\phi] = \int_M \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right] d^n x.$$

汎関数微分は

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)}$$

で表します。

第2段階 ベクトルの記法

2.1 ベクトルの定義

ベクトル空間 V の元を

$$\mathbf{v} \in V$$

と書きます。

基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ を選ぶと、

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$$

と成分表示できます。アインシュタインの総和規約では、同じ添字が上と下に1回ずつ現れると総和を取ります。

$$v^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i.$$

列ベクトル表示は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.$$

2.2 双対ベクトル

双対空間 V^* の元は、ベクトルをスカラーに写す線形写像です。

$$\omega : V \rightarrow \mathbb{K}.$$

成分表示は

$$\omega = \omega_i \mathbf{e}^i.$$

ベクトルとの縮約は

$$\omega(\mathbf{v}) = \omega_i v^i.$$

行ベクトルとしては

$$\omega = (\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_n).$$

2.3 ベクトルの代数記法

ベクトル加法・スカラー倍

$$\mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad a\mathbf{v}.$$

内積

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_i v^i.$$

ユークリッド空間では

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_i u^i v^i.$$

計量 g_{ij} がある場合、

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = g_{ij} u^i v^j.$$

外積

三次元では

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^i = \varepsilon^{ijk} u_j v_k.$$

外積代数

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}.$$

したがって

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0.$$

2.4 群作用を受けるベクトル

線形群 $GL(n, \mathbb{K})$ はベクトル空間に作用します。

$$A \in GL(n, \mathbb{K}), \quad \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}.$$

成分では

$$v'^i = A^i_j v^j.$$

回転群 $SO(n)$ では

$$R^T R = I, \quad \det R = 1.$$

三次元回転なら

$$\mathbf{v}' = R\mathbf{v}.$$

特殊相対論ではローレンツ群が四元ベクトルに作用します。

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu.$$

2.5 ベクトル解析の記法

スカラー場 ϕ の勾配：

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial\phi}{\partial x^n} \right).$$

ベクトル場 $\mathbf{A}$ の発散：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_i A^i.$$

三次元での回転：

$$\nabla \times \mathbf{A}.$$

ラプラシアン：

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \partial_i \partial^i \phi.$$

2.6 ベクトル微分方程式

ニュートン方程式：

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t).$$

一次の連立方程式：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}.$$

解は

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}(0).$$

電磁場のベクトル方程式：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

第3段階 マトリクスの記法

3.1 マトリクスと線形写像

行列は線形写像

$$A : V \rightarrow W$$

の基底表示です。

$$A = (A^i_j) = \begin{pmatrix} A^1_1 & \cdots & A^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^m_1 & \cdots & A^m_n \end{pmatrix}.$$

ベクトルへの作用は

$$w^i = A^i_j v^j$$

または

$$\mathbf{w} = A\mathbf{v}.$$

3.2 行列代数

積

$$(AB)^i_j = A^i_k B^k_j.$$

転置

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

複素共役

$$\overline{A} = (\overline{A_{ij}}).$$

エルミート共役

$$A^\dagger = \overline{A}^T.$$

逆行列

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

行列式

$$\det A.$$

トレース

$$\mathrm{tr} A = A^i_i.$$

交換子

$$[A, B] = AB - BA.$$

反交換子：

$$\{A, B\} = AB + BA.$$

3.3 行列方程式

線形代数方程式：

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

固有値方程式：

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

固有値は

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

から求めます。

対角化可能なら

$$A = PDP^{-1}.$$

エルミート行列なら

$$A = UDU^\dagger.$$

3.4 リー群・リー代数の行列記法

リー群の元は指数写像により

$$g = e^{\theta^a T_a}$$

と書けます。

物理学ではしばしば

$$g = e^{i\theta^a T_a}$$

を用います。

生成子 T_a はリー代数をなし、

$$[T_a, T_b] = if_{ab}{}^c T_c.$$

ここで $f_{ab}{}^c$ は構造定数です。

$SU(2)$

$$U = e^{i\theta^a \sigma_a/2},$$

パウリ行列は

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

交換関係は

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k.$$

3.5 行列微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

の解は

$$X(t) = e^{tA} X(0).$$

一般形：

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X.$$

$A(t_1)$ と $A(t_2)$ が交換しない場合には、時間順序積を用いて

$$X(t) = \mathcal{T} \exp \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right) X(t_0)$$

と書きます。

3.6 量子力学での行列記法

状態ベクトル：

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

演算子：

$$\hat{A} = (A_{mn}).$$

期待値：

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle.$$

密度行列：

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|.$$

時間発展：

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle.$$

第4段階 テンソルの記法

4.1 テンソルの定義

(r, s) 型テンソルは、抽象的には

$$T \in V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$$

の元です。

成分表示は

$$T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}.$$

代表例は次のとおりです。

スカラー: T

ベクトル: T^i

共変ベクトル: T_i

2階テンソル: $T^{ij}, T^i_j, T_{ij}.$

したがって、スカラー・ベクトル・行列は、広い意味でテンソルの特殊な場合です。

4.2 テンソル積

ベクトル $u \in V$ と $v \in W$ のテンソル積は

$$u \otimes v \in V \otimes W.$$

成分では

$$(u \otimes v)^{ij} = u^i v^j.$$

4.3 対称・反対称テンソル

対称テンソル:

$$T_{ij} = T_{ji}.$$

反対称テンソル:

$$F_{ij} = -F_{ji}.$$

対称化記法:

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}).$$

反対称化記法:

$$T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}).$$

4.4 縮約

上付き添字と下付き添字を同じ記号で結ぶ操作を縮約といいます。

$$T^i{}_i.$$

行列ではトレースに対応します。

$$T^i{}_i = \text{tr } T.$$

二つのテンソルの縮約：

$$A^{ij}B_{jk} = C^i{}_k.$$

4.5 計量テンソル

計量は

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

と書きます。

線素は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

添字を下げる操作：

$$v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu.$$

添字を上げる操作：

$$v^\mu = g^{\mu\nu} v_\nu,$$

ただし

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu.$$

4.6 テンソルの座標変換

反変ベクトル：

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu.$$

共変ベクトル：

$$\omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu.$$

一般のテンソル：

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_r}}{\partial x^{\alpha_r}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_s}}{\partial x'^{\nu_s}} T^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \beta_s}.$$

この変換則を満たすことが、テンソルであることの本質です。

4.7 テンソル微分

通常の変微分

$$\partial_\mu T^{\nu\rho}$$

は、一般にはテンソルとして変換しません。そこで共変微分を導入します。

ベクトルでは

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu v^\rho.$$

共変ベクトルでは

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \omega_\rho.$$

一般のテンソルでは、上付き添字ごとに $+\Gamma$ 、下付き添字ごとに $-\Gamma$ の項を加えます。

4.8 曲率テンソル

リーマン曲率テンソル：

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda.$$

リッチテンソル：

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}.$$

リッチスカラー：

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

アインシュタインテンソル：

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R.$$

アインシュタイン方程式：

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

第5段階 スピノールの記法

5.1 スピノールとは何か

スピノールは、通常のベクトルとは異なり、回転群そのものではなく、その二重被覆群の表現空間の元です。

三次元回転では

$$SO(3)$$

に対して

$$\text{Spin}(3) \cong SU(2)$$

が二重被覆になります。

$$SU(2) \longrightarrow SO(3).$$

スピノールは

$$\psi^\alpha$$

または列ベクトルとして

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$$

と書きます。

5.2 スピノールの変換

二成分スピノールでは

$$\psi'^\alpha = S^\alpha{}_\beta \psi^\beta, \quad S \in SL(2, \mathbb{C}).$$

回転では

$$\psi' = \exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \psi.$$

角度 2π の回転に対して

$$\psi \mapsto -\psi,$$

角度 4π の回転で

$$\psi \mapsto \psi$$

となることが、通常のベクトルとの重要な違いです。

5.3 ディラックスピノール

四次元時空ではディラックスピノールを

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

と書きます。

ディラック共役は

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0.$$

ガンマ行列はクリフォード代数

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I$$

を満たします。

5.4 ディラック方程式

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0.$$

電磁場と結合すると

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0,$$

ただし

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu.$$

ディラック作用は

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi.$$

5.5 スピノール双線形

二つのスピノールからテンソル的な量を構成できます。

スカラー：

$$\bar{\psi}\psi.$$

ベクトル：

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi.$$

軸性ベクトル：

$$j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi.$$

反対称テンソル：

$$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

このように、スピノールからスカラー・ベクトル・テンソルが構成されます。

第6段階 代数における記法

6.1 離散群

群は集合 G と演算

$$\cdot : G \times G \rightarrow G$$

の組です。

$$(G, \cdot).$$

群の条件は

$$(ab)c = a(bc),$$

$$\exists e \in G : \quad ea = ae = a,$$

$$\forall a \in G, \quad \exists a^{-1} \in G.$$

離散群の例：

$$\mathbb{Z}_n, \quad S_n, \quad D_n.$$

巡回群：

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

対称群：

$$S_n = \{n\text{個の対象の置換}\}.$$

群表現は

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

で表します。

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2).$$

6.2 連続群・リー群

リー群は、群であると同時に滑らかな多様体です。

G は群かつ滑らかな多様体.

例：

$$GL(n, \mathbb{R}), \quad SO(n), \quad SU(n), \quad U(1).$$

単位元付近では

$$g(\theta) = \exp(\theta^a T_a)$$

と書きます。

リー代数は接空間

$$\mathfrak{g} = T_e G$$

であり、交換子

$$[X, Y] \in \mathfrak{g}$$

を持ちます。

6.3 環

環は、加法と乗法をもつ集合です。

$$(R, +, \cdot).$$

例：

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_n, \quad \mathbb{R}[x].$$

多項式環：

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n].$$

イデアルは

$$I \triangleleft R$$

と書きます。

商環：

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2).$$

6.2 連続群・リー群

リー群は、群であると同時に滑らかな多様体です。

G は群かつ滑らかな多様体.

例：

$$GL(n, \mathbb{R}), \quad SO(n), \quad SU(n), \quad U(1).$$

単位元付近では

$$g(\theta) = \exp(\theta^a T_a)$$

と書きます。

リー代数は接空間

$$\mathfrak{g} = T_e G$$

であり、交換子

$$[X, Y] \in \mathfrak{g}$$

をもちます。

6.3 環

環は、加法と乗法をもつ集合です。

$$(R, +, \cdot).$$

例：

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_n, \quad \mathbb{R}[x].$$

多項式環：

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n].$$

イデアルは

$$I \triangleleft R$$

と書きます。

商環：

と定義します。

同相写像：

$$f : X \xrightarrow{\sim} Y.$$

第7段階 解析における記法

7.1 実解析

極限：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

連続性：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

列の収束：

$$x_n \rightarrow x.$$

コーシー列：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, m, n > N \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

ルベグ積分：

$$\int_X f \, d\mu.$$

測度空間：

$$(X, \Sigma, \mu).$$

7.2 複素解析

複素関数：

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}.$$

複素微分：

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

コーシー・リーマン方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

ただし

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

複素線積分：

$$\oint_C f(z) dz.$$

コーシーの積分公式：

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

留数：

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z).$$

7.3 関数解析

ノルム空間：

$$(V, \|\cdot\|).$$

バナッハ空間：

V は完備なノルム空間.

ヒルベルト空間：

$$(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

線形作用素：

$$A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}.$$

随伴作用素：

$$\langle \phi, A\psi \rangle = \langle A^\dagger \phi, \psi \rangle.$$

自己共役作用素：

$$A = A^\dagger.$$

作用素の固有値方程式：

$$A\psi = \lambda\psi.$$

スペクトル：

$$\sigma(A).$$

物理学では観測量を自己共役作用素として表します。

7.4 微分方程式・積分方程式・汎関数方程式

常微分方程式

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^ny}{dt^n}\right) = 0.$$

偏微分方程式

$$F(x, \phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \partial_\nu \phi, \dots) = 0.$$

線形作用素方程式

$$L\phi = f.$$

固有関数方程式

$$L\phi = \lambda\phi.$$

積分方程式

$$\phi(x) - \lambda \int K(x, y)\phi(y) dy = f(x).$$

汎関数方程式

関数そのものを未知量とする方程式：

$$F[\phi] = 0.$$

変分原理：

$$\delta S[\phi] = 0.$$

オイラー＝ラグランジュ汎関数方程式：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0.$$

第8段階 多様体の記法

8.1 多様体

n 次元多様体を

$$M$$

または

$$M^n$$

と書きます。

局所座標系は

$$(U, \varphi), \quad \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

座標は

$$x^\mu = \varphi^\mu(p).$$

座標変換は

$$x'^\mu = x'^\mu(x^1, \dots, x^n).$$

8.2 接空間・余接空間

点 $p \in M$ における接空間：

$$T_p M.$$

接ベクトル：

$$v_p = v^\mu \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p.$$

余接空間：

$$T_p^* M.$$

1形式：

$$\omega_p = \omega_\mu dx^\mu.$$

接束：

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

余接束：

$$T^* M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M.$$

8.3 ベクトル場・テンソル場

ベクトル場：

$$X \in \Gamma(TM).$$

1形式：

$$\omega \in \Omega^1(M) = \Gamma(T^*M).$$

(r, s) 型テンソル場：

$$T \in \Gamma(T^r_s M).$$

ここで $\Gamma(E)$ は束 E の切断全体を表します。

8.4 微分形式

p 形式：

$$\omega \in \Omega^p(M).$$

局所表示：

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}.$$

外微分：

$$d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M).$$

重要な性質：

$$d^2 = 0.$$

閉形式：

$$d\omega = 0.$$

完全形式：

$$\omega = d\alpha.$$

8.5 多様体上の積分

n 次元多様体上の n 形式について

$$\int_M \omega$$

を定義します。

ストークスの定理：

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

これは、微積分学の基本定理、グリーンの定理、ガウスの定理、ストークスの定理を統一します。

第9段階 ファイバー・バンドルの記法

日本語では通常「ファイバー束」または「繊維束」と呼びます。

9.1 基本構造

ファイバー束は

$$(E, M, \pi, F)$$

または

$$F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$$

と書きます。

- M : 底空間
- E : 全空間
- F : ファイバー
- $\pi : E \rightarrow M$: 射影

各点 $x \in M$ のファイバーは

$$E_x = \pi^{-1}(x).$$

局所自明化：

$$\pi^{-1}(U) \cong U \times F.$$

9.2 切断

切断は

$$s : M \rightarrow E$$

であり、

$$\pi \circ s = \text{id}_M$$

を満たします。

切断全体：

$$\Gamma(E).$$

物理学では、場はしばしばファイバー束の切断として表されます。

$$\phi \in \Gamma(E).$$

9.3 ベクトル束

ファイバーがベクトル空間 V の場合、

$$V \hookrightarrow E \rightarrow M$$

をベクトル束と呼びます。

接束：

$$\mathbb{R}^n \hookrightarrow TM \rightarrow M.$$

スピノール束：

$$S \hookrightarrow \mathcal{S} \rightarrow M.$$

スピノール場：

$$\psi \in \Gamma(\mathcal{S}).$$

9.4 主束とゲージ理論

構造群 G をもつ主束は

$$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$$

と書きます。

接続1形式：

$$A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g}).$$

局所的には

$$A = A_\mu^a T_a dx^\mu.$$

曲率2形式：

$$F = dA + A \wedge A.$$

成分表示：

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

アーベル群 $U(1)$ では交換子が消えるため、

$$F = dA.$$

非可換群 $SU(2), SU(3)$ では

$$A \wedge A \neq 0$$

です。

9.5 共変微分

物質場 ψ に対する共変微分は

$$D\psi = d\psi + A\psi.$$

局所成分では

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A_\mu \psi.$$

物理学の慣例では

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a T_a.$$

ゲージ変換は

$$\psi \mapsto g\psi,$$

$$A \mapsto gAg^{-1} - (dg)g^{-1}.$$

曲率は

$$F \mapsto gFg^{-1}$$

と変換します。

第10段階 幾何学の記法

10.1 代数幾何学

代数幾何学では、多項式方程式の解集合を研究します。

アフィン代数多様体：

$$V(I) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) = 0 \text{ for all } f \in I\}.$$

単一の多項式なら

$$V(f) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) = 0\}.$$

例：

$$V(x^2 + y^2 - 1)$$

は、実数上では円を表します。

多項式環：

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n].$$

イデアル：

$$I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle.$$

座標環：

$$\mathbb{K}[V] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I(V).$$

射影空間：

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}).$$

斉次座標：

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n].$$

物理学では、複素多様体、カラビ＝ヤウ多様体、モジュライ空間、ツイスター空間などに現れます。

10.2 位相幾何学

ホモトピー：

$$f \simeq g.$$

基本群：

$$\pi_1(X, x_0).$$

高次ホモトピー群：

$$\pi_n(X).$$

ホモロジー群：

$$H_n(X; R).$$

コホモロジー群：

$$H^n(X; R).$$

ド・ラームコホモロジー：

$$H_{\text{dR}}^p(M) = \frac{\ker(d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1})}{\text{im}(d : \Omega^{p-1} \rightarrow \Omega^p)}.$$

オイラー標数：

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dim H_n(X).$$

物理学では、磁気単極子、インスタントン、トポロジカル欠陥、トポロジカル量子数に関係します。

10.3 微分位相幾何学

一般には「微分位相幾何学」よりも「微分位相幾何学・微分幾何学」または単に「微分位相幾何学」と区別して扱います。

滑らかな写像：

$$f : M \rightarrow N.$$

微分写像：

$$df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N.$$

ランク：

$$\text{rank}(df_p).$$

臨界点：

$$\text{rank}(df_p) < \dim N.$$

正則値：

$$q \in N, \quad df_p \text{ が全射}$$

for all $p \in f^{-1}(q)$.

埋め込み：

$$f : M \hookrightarrow N.$$

微分同相：

$$f : M \xrightarrow{\cong} N.$$

微分同相写像は、滑らかで、その逆写像も滑らかです。

10.4 微分幾何学

接続：

$$\nabla_X Y.$$

測地線方程式：

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0.$$

曲率作用素：

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

リ-微分：

$$\mathcal{L}_X T.$$

キリング方程式：

$$\mathcal{L}_X g = 0,$$

成分では

$$\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = 0.$$

第11段階 記法による方程式の分類

11.1 代数方程式

未知量が有限個の数・ベクトル・行列である方程式です。

スカラー：

$$p(x) = 0.$$

ベクトル：

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

行列：

$$AX - XB = C.$$

固有値問題：

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

テンソル：

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}.$$

スピノール：

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0.$$

11.2 微分方程式

スカラー場：

$$\square\phi + m^2\phi = 0.$$

ベクトル場：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu.$$

テンソル場：

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

スピノール場：

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0.$$

11.3 積分方程式

スカラー：

$$\phi(x) = f(x) + \int K(x, y)\phi(y) dy.$$

ベクトル：

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{f}(x) + \int K(x, y)\mathbf{v}(y) dy.$$

テンソル：

$$T_{\mu\nu}(x) = S_{\mu\nu}(x) + \int K_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}(x, y)T_{\rho\sigma}(y) dy.$$

場の量子論の伝播関数表示：

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \int G(x - y)J(y) d^4y.$$

11.4 汎関数方程式

作用の停留条件：

$$\delta S[\phi] = 0.$$

場の方程式：

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} = 0.$$

量子重力の波動関数：

$$\Psi[h_{ij}, \phi].$$

ホイーラー＝ドウィット方程式：

$$\widehat{\mathcal{H}}\Psi[h_{ij}, \phi] = 0.$$

経路積分：

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi]}.$$

生成関数：

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S[\phi] + \int J\phi d^4x \right) \right].$$

第12段階 数学的対象と物理学的対象の対応

数学的対象	数学記法	物理学での例	代表方程式
スカラー	$\phi \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$	温度、質量、スカラー場、ヒッグス場	$(\square + m^2)\phi = 0$
ベクトル	$v^i, \mathbf{v} \in V$	位置、速度、運動量、電場	$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$
共変ベクトル・1形式	$\omega_i, \omega = \omega_i dx^i$	運動量1形式、ゲージポテンシャル	$A = A_\mu dx^\mu$
行列	A^i_j	線形変換、量子演算子、群表現	$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$
対称テンソル	$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$	時空計量、応力テンソル	$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$
反対称テンソル	$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$	電磁場強度	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$
一般テンソル	$T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$	曲率、エネルギー運動量	$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$

数学的対象	数学記法	物理学での例	代表方程式
2成分スピノール	ψ^α	左手・右手ワイル粒子	$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi = 0$
4成分スピノール	ψ	電子、クォークなど	$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0$
汎関数	$S[\phi]$	作用、量子状態汎関数	$\delta S = 0$

第13段階 数学分野ごとの記法の総括表

数学分野	基本対象	典型的記法	基本演算・構造	代表的方程式
離散群	有限・可算集合	$G, \mathbb{Z}_n, S_n$	gh, g^{-1}, e	$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2)$
リー群	群かつ多様体	$G, SO(n), SU(n)$	$g = e^{\theta^a T_a}$	$[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c$
環	加法・乗法をもつ集合	$R, \mathbb{K}[x]$	$+, \cdot, I \triangleleft R$	R/I
体	除法可能な数体系	$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$	$+, -, \times, \div$	$ax = b$
位相	開集合構造	(X, τ)	開集合、連続写像	$f^{-1}(V) \in \tau_X$
実解析	実関数・測度	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	極限、微分、積分	$f'(x), \int f d\mu$
複素解析	正則関数	$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$	複素微分、留数	$\oint_C f(z) dz$
関数解析	無限次元空間	$\mathcal{H}, L^p, A$	ノルム、内積、作用素	$A\psi = \lambda\psi$
多様体	局所ユークリッド空間	$M, (U, \varphi)$	接空間、座標変換	$x'^\mu = x'^\mu(x)$
微分形式	反対称共変テンソル	$\omega \in \Omega^p(M)$	$d, \wedge, \int$	$d^2 = 0$
ファイバー束	底空間上のファイバー	$F \hookrightarrow E \rightarrow M$	切断、接続、曲率	$F = dA + A \wedge A$

数学分野	基本対象	典型的記法	基本演算・構造	代表的方程式
代数幾何学	多項式の解集合	$V(I), \text{Spec } R$	イデアル、座標環	$f_1 = \cdots = f_m = 0$
位相幾何学	連続変形不変量	π_n, H_n, H^n	ホモトピー、ホモロジー	$\chi = \sum (-1)^n \dim H_n$
微分位相幾何学	滑らかな多様体・写像	$f : M \rightarrow N, df_p$	埋め込み、臨界点	$\text{rank } df_p$
微分幾何学	計量・接続・曲率	g, ∇, R	共変微分、曲率	$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$

第14段階 対象と分野を交差させたまとめ

対象	代数	解析	多様体	ファイバー束	幾何学
スカラー	$a \in \mathbb{K}$	$f, \partial_\mu f, \int f$	$f : M \rightarrow \mathbb{K}$	自明線束の切断	座標不変量
ベクトル	$v \in V$	$\dot{v}, \nabla \cdot v$	$v_p \in T_p M$	$v \in \Gamma(TM)$	接ベクトル、ベクトル場
行列	$A \in GL(n)$	$\dot{X} = AX$	df_p の行列表現	遷移関数 $g_{\alpha\beta}$	線形変換、群表現
テンソル	$V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}$	$\nabla_\mu T$	$T_p \in T^r{}_s M$	テンソル束の切断	計量・曲率
スピノール	$\text{Spin}(p, q)$ の表現	$\gamma^\mu D_\mu \psi$	スピノル構造をもつ多様体	スピノル束の切断	スピノル幾何学

結論：記法の階層構造

数学と物理学の記法は、次の階層としてまとめられます。

$$\text{数} \subset \text{ベクトル} \subset \text{テンソル代数}$$

ただしスピノールは、単純に通常のテンソルの高階版ではなく、

$$\text{スピノール} = \text{Spin}(p, q) \text{ または クリフォード代数の表現}$$

として導入されます。

さらに、位置 x に依存させると「場」になります。

$$\phi(x), \quad v^\mu(x), \quad T_{\mu\nu}(x), \quad \psi^\alpha(x).$$

これらを多様体上で定義すると、

物理的な場 = 適切なファイバー束の切断

と統一的に表現できます。

そして運動法則は、

代数方程式 $\rightarrow$ 微分方程式 $\rightarrow$ 積分方程式 $\rightarrow$ 汎関数方程式

という段階で高度化します。

最終的には、現代物理学の基本構造は

時空	: M ,
対称性	: G ,
場	: $\Phi \in \Gamma(E)$,
接続	: A ,
曲率	: $F = dA + A \wedge A$,
作用	: $S[\Phi, A, g]$,
運動方程式	: $\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0$

という記法によって統一されます。

📄 📌 🔄 ⬆️ ↺ ...

第2の質問です。以上の「記法」が、物理学である「古典力学（ニュートン力学）」「解析力学（ラグランジアン、ラグランジアン密度）」「量子力学」「特殊相対性理論」「一般相対性理論（重力理論）」「場の量子論」「素粒子標準理論（ラグランジアン密度、運動方程式、量子化、素粒子名）」「量子重力理論」「ツイスター理論」において、どのように使用されているか、数学用語とともに、段階的に説明してください。そのまとめの表も作成してください。

第2問 数学的「記法」は各物理理論でどのように使われるか

英治さん、第1問で整理した記法を、各物理理論に共通する次の六つの要素に対応させます。

空間・時空	$M,$
状態	$q, \psi, \Phi,$
対称性	$G, \rho: G \rightarrow GL(V),$
運動法則	$F = ma, \quad \delta S = 0, \quad \widehat{H}\psi = E\psi,$
相互作用	$A_\mu, F_{\mu\nu}, g_{\mu\nu},$
量子化	$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar, \quad [\hat{\phi}, \hat{\pi}] = i\hbar\delta$

物理理論が高度になるにつれて、数学的記法はおおむね

数・ベクトル $\rightarrow$ 行列・作用素 $\rightarrow$ テンソル・多様体 $\rightarrow$ ファイバー束

へと発展します。

1. 古典力学・ニュートン力学

1.1 基本空間

ニュートン力学では、時間と空間を分けて扱います。

$$t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3.$$

一粒子の状態は位置と速度、または位置と運動量で表されます。

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in T^*\mathbb{R}^3.$$

ここで

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

1.2 使用される数学的対象

スカラー

$$m, \quad t, \quad E, \quad V(\mathbf{x})$$

- m : 質量
- E : エネルギー
- V : 位置エネルギー

ベクトル

$$\mathbf{x}, \quad \mathbf{v}, \quad \mathbf{a}, \quad \mathbf{p}, \quad \mathbf{F}$$

行列

回転や慣性テンソルに使用します。

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x}, \quad R \in SO(3).$$

慣性テンソル：

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}.$$

角運動量は

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}.$$

テンソル

剛体力学・連続体力学では応力テンソル

$$\sigma_{ij}$$

や慣性テンソル

$$I_{ij}$$

が現れます。

スピノールは通常の古典的質点力学には現れません。

1.3 ニュートンの運動方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

成分表示：

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = F^i.$$

これは、ベクトル値の二階常微分方程式です。

重力では

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r}.$$

したがって、

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{mM}{r^3}\mathbf{r}.$$

1.4 対称性

ニュートン力学の基本対称性はガリレイ群です。

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}, \quad t' = t + b.$$

群としては概念的に

$$\text{Gal}(3)$$

で表されます。

空間回転は

$$SO(3)$$

で記述されます。

1.5 保存則

運動量：

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}.$$

角運動量：

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}.$$

エネルギー：

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{x}).$$

それぞれ空間並進、回転、時間並進の対称性に対応します。

2. 解析力学

解析力学では、運動を「力」よりも、作用汎関数と変分原理によって記述します。

2.1 配置空間

一般化座標を

$$q^i, \quad i = 1, \dots, n$$

とします。

配置空間は多様体

$$Q$$

です。

速度は接束

$$(q, \dot{q}) \in TQ$$

の元です。

運動量は余接束

$$(q, p) \in T^*Q$$

の元です。

2.2 ラグランジアン

ラグランジアンは関数

$$L : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

として

$$L = L(q^i, \dot{q}^i, t)$$

と書きます。

通常は

$$L = T - V.$$

一粒子では

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}).$$

2.3 作用汎関数

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

ここで S は、関数 $q(t)$ を入力して実数を返す汎関数です。

変分原理：

$$\delta S = 0.$$

2.4 オイラー＝ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

これは汎関数方程式

$$\frac{\delta S}{\delta q^i(t)} = 0$$

の具体形です。

2.5 ハミルトン力学

正準運動量：

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}.$$

ハミルトニアン：

$$H(q, p, t) = p_i \dot{q}^i - L.$$

ハミルトン方程式：

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

相空間はシンプレクティック多様体

$$(T^*Q, \omega)$$

です。

シンプレクティック形式：

$$\omega = dq^i \wedge dp_i.$$

ポアソン括弧：

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}.$$

時間発展：

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

2.6 ラグランジアン密度

粒子では L を使いますが、場ではラグランジアン密度

$$\mathcal{L}$$

を使います。

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

場のオイラー＝ラグランジュ方程式：

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) = 0}$$

3. 量子力学

3.1 状態空間

量子状態はヒルベルト空間

$$\mathcal{H}$$

のベクトルです。

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}.$$

波動関数表示では

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle.$$

複素ヒルベルト空間を用いるため、

$$\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}.$$

3.2 スカラー・ベクトル・行列

複素スカラー

$$\psi(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{C}.$$

確率密度：

$$\rho(\mathbf{x}, t) = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2.$$

状態ベクトル

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle.$$

行列・作用素

観測量は自己共役作用素です。

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger.$$

基底を選ぶと

$$A_{mn} = \langle m | \hat{A} | n \rangle.$$

固有値方程式：

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle.$$

3.3 シュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

座標表示：

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi.$$

時間に依存しない場合：

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n.$$

3.4 演算子代数

位置と運動量：

$$\hat{x}^i, \quad \hat{p}_j.$$

正準交換関係：

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta^i_j$$

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0.$$

不確定性関係：

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|.$$

3.5 スピノール

スピン 1/2 の状態は二成分スピノールです。

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{\uparrow} \\ \chi_{\downarrow} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

スピン演算子：

$$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i.$$

固有値：

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.6 密度行列

純粋状態：

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|.$$

混合状態：

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|.$$

条件：

$$\rho^\dagger = \rho, \quad \text{tr } \rho = 1, \quad \rho \geq 0.$$

4. 特殊相対性理論

4.1 ミンコフスキー時空

時空を四次元ベクトル空間として

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

と書きます。

ミンコフスキー計量：

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

または符号規約により

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1).$$

時空間隔：

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

4.2 ローレンツ変換

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu.$$

ローレンツ行列は

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

を満たします。

したがって

$$\Lambda \in O(1, 3).$$

時間・空間の向きを保つ部分は

$$SO^+(1, 3).$$

4.3 四元ベクトル

四元速度：

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

四元運動量：

$$p^\mu = m u^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right).$$

不変関係：

$$p_\mu p^\mu = m^2 c^2.$$

したがって

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4.$$

4.4 テンソル

電磁ポテンシャル：

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right).$$

電磁場テンソル：

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

行列表現：

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

マクスウェル方程式：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu,$$

$$\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0.$$

4.5 スピノール

ローレンツ群の二重被覆は

$$\text{Spin}(1, 3) \cong SL(2, \mathbb{C}).$$

したがって相対論的フェルミ粒子は

$$SL(2, \mathbb{C})$$

のスピノール表現で記述されます。

5. 一般相対性理論・重力理論

5.1 時空多様体

一般相対論では時空は四次元ローレンツ多様体です。

$$(M, g).$$

- M ：滑らかな四次元多様体
- g ：ローレンツ計量

局所座標：

$$x^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

5.2 計量テンソル

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

線素：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

計量は各点で対称行列として表されます。

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

5.3 接続と共変微分

レヴィ=チヴィタ接続：

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}).$$

ベクトルの共変微分：

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho.$$

5.4 測地線

自由落下粒子は測地線に沿います。

$$\boxed{\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0}$$

これは多様体上の非線形常微分方程式です。

5.5 曲率テンソル

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda.$$

リッチテンソル：

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}.$$

スカラー曲率：

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

5.6 アインシュタイン方程式

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

ここで

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R.$$

左辺は時空幾何、右辺は物質・エネルギーです。

$$\boxed{\text{曲率} = \text{物質} \cdot \text{エネルギー}}$$

というテンソル方程式です。

5.7 アインシュタイン＝ヒルベルト作用

$$S_{\text{GR}} = \frac{c^3}{16\pi G} \int_M (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x + S_{\text{matter}}.$$

変分：

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$$

からアインシュタイン方程式が導かれます。

5.8 ファイバー束による記述

接束：

$$TM \rightarrow M.$$

フレーム束：

$$GL(4, \mathbb{R}) \hookrightarrow FM \rightarrow M.$$

ローレンツフレーム束：

$$SO(1, 3) \hookrightarrow P_{\text{Lor}} \rightarrow M.$$

スピノールを導入する場合はスピン束

$$\text{Spin}(1, 3) \hookrightarrow P_{\text{Spin}} \rightarrow M$$

を用います。

6. 場の量子論

6.1 基本的発想

量子力学では有限個の自由度

$$q^i(t)$$

を量子化します。

場の量子論では、各空間点に自由度をもつ場

$$\phi(x)$$

を量子化します。

$$\phi(x) \longrightarrow \hat{\phi}(x).$$

6.2 場の種類

スカラー場

$$\phi(x).$$

複素スカラー場

$$\phi(x) \in \mathbb{C}.$$

スピノール場

$$\psi_\alpha(x).$$

ベクトル場

$$A_\mu(x).$$

テンソル場

$$h_{\mu\nu}(x).$$

6.3 スカラー場

ラグランジアン密度：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V_{\text{int}}(\phi).$$

自由場では

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2.$$

運動方程式：

$$(\square + m^2)\phi = 0.$$

6.4 ディラック場

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.$$

運動方程式：

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0.$$

ここでは

- ψ ：スピノール
- γ^μ ：行列
- ∂_μ ：微分作用素
- $\bar{\psi}\psi$ ：ローレンツスカラー

です。

6.5 ゲージ場

アーベルゲージ場：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

非可換ゲージ場：

$$\begin{aligned} A_\mu &= A_\mu^a T_a, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]. \end{aligned}$$

成分では

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

ラグランジアン密度：

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}.$$

6.6 正準量子化

共役運動量：

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}.$$

交換関係：

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})] = i\hbar \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

ボース場：

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}).$$

フェルミ場：

$$\{\hat{b}_{\mathbf{p},s}, \hat{b}_{\mathbf{q},r}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{sr} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}).$$

6.7 経路積分

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]/\hbar}.$$

相関関数：

$$\langle 0|T\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\}|0\rangle.$$

生成汎関数：

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S[\phi] + \int J\phi d^4x \right) \right].$$

7. 素粒子標準模型

標準模型はゲージ群

$$G_{\text{SM}} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

に基づく量子ゲージ場理論です。

7.1 記法の意味

- $SU(3)_C$ ：強い相互作用、カラー
- $SU(2)_L$ ：弱いアイソスピン
- $U(1)_Y$ ：弱超電荷

場は、この群の表現空間に値をとるファイバー束の切断です。

$$\Phi \in \Gamma(E_\rho).$$

7.2 標準模型のラグランジアン密度

概略的には

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$$

です。

より具体的には

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SM}} = & -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ & + \sum_f \bar{\psi}_f i\gamma^\mu D_\mu \psi_f \\ & + (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi) \\ & - \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}. \end{aligned}$$

7.3 ゲージ場

グルーオン

$$G_\mu^a, \quad a = 1, \dots, 8.$$

群：

$$SU(3)_C.$$

場の強度：

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c.$$

弱ゲージ場

$$W_\mu^i, \quad i = 1, 2, 3.$$

群：

$$SU(2)_L.$$

超電荷場

$$B_\mu.$$

群：

$$U(1)_Y.$$

7.4 共変微分

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu^a T^a - ig W_\mu^i \frac{\tau^i}{2} - ig' Y B_\mu$$

ここで

- T^a : $SU(3)$ の生成子
- $\tau^i/2$: $SU(2)$ の生成子
- Y : 弱超電荷
- g_s, g, g' : 結合定数

です。

7.5 フェルミ粒子

フェルミ粒子はスピノール場として記述されます。

クォーク

$$u, d, c, s, t, b.$$

- up : アップ
- down : ダウン
- charm : チャーム
- strange : ストレンジ
- top : トップ
- bottom : ボトム

左手型クォーク二重項：

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}.$$

右手型：

$$u_R, \quad d_R.$$

クォークはカラー三重項：

$$\mathbf{3}$$

として $SU(3)_C$ の表現に属します。

レプトン

$$e, \mu, \tau, \quad \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau.$$

左手型レプトン二重項：

$$L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}.$$

右手型荷電レプトン：

$$e_R.$$

7.6 ゲージ・ボソン

相互作用	粒子	記法
電磁相互作用	光子	γ, A_μ
弱い相互作用	W^+, W^-, Z^0	$W_\mu^\pm, Z_\mu$
強い相互作用	8種類のグルーオン	g^a, G_μ^a

7.7 ヒッグス場

ヒッグス場は複素 $SU(2)$ 二重項です。

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}.$$

ヒッグスポテンシャル：

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2.$$

真空期待値：

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

対称性の破れ：

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{\text{em}}.$$

7.8 電弱混合

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta_W & \cos \theta_W \\ \cos \theta_W & -\sin \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}.$$

荷電弱ボソン：

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2).$$

7.9 湯川相互作用

$$\mathcal{L}_Y = -y_d \bar{Q}_L \Phi d_R - y_u \bar{Q}_L \widetilde{\Phi} u_R - y_e \bar{L}_L \Phi e_R + \text{h.c.}$$

ここで

$$\widetilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^*.$$

対称性の破れ後、

$$m_f = \frac{y_f v}{\sqrt{2}}$$

としてフェルミ粒子の質量が生じます。

7.10 標準模型の運動方程式

フェルミオン：

$$i\gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{\partial \mathcal{L}_Y}{\partial \bar{\psi}} = 0.$$

ヤン=ミルズ場：

$$D_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu.$$

ヒッグス場：

$$D_\mu D^\mu \Phi + \frac{\partial V}{\partial \Phi^\dagger} + \text{湯川項} = 0.$$

7.11 標準模型の量子化

ゲージ場を量子化するとゲージ・ボソンが生じます。

$$A_\mu(x) \longrightarrow \hat{A}_\mu(x).$$

フェルミオン場を量子化すると、粒子・反粒子生成演算子が現れます。

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [b_{\mathbf{p},s} u_s(\mathbf{p}) e^{-ipx} + d_{\mathbf{p},s}^\dagger v_s(\mathbf{p}) e^{ipx}].$$

- $b^\dagger$: 粒子生成
- $d^\dagger$: 反粒子生成

ゲージ固定とゴースト場も必要です。

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{gf}} + \mathcal{L}_{\text{ghost}}.$$

8. 量子重力理論

量子重力では、

$$\text{一般相対論} + \text{量子論}$$

を統合しようとしています。

ただし、現在まで単一の完成した理論が確立されているわけではありません。

8.1 重力場の量子化

計量を

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$$

と分解します。

- $\eta_{\mu\nu}$: 平坦時空
- $h_{\mu\nu}$: 量子的重力場
- $\kappa^2 = 32\pi G$

線形化された $h_{\mu\nu}$ はスピン2の場として扱われます。

量子は重力子

$$g \quad \text{または} \quad \text{graviton}$$

と呼ばれます。

8.2 正準量子重力

空間計量：

$$h_{ij}(x).$$

共役運動量：

$$\pi^{ij}(x).$$

正準交換関係：

$$[\hat{h}_{ij}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{kl}(\mathbf{y})] = i\hbar \delta_{(i}^k \delta_{j)}^l \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

波動関数は通常の

$$\psi(x)$$

ではなく、三次元空間の幾何そのものの汎関数です。

$$\Psi[h_{ij}].$$

8.3 ホイラー＝ドウィット方程式

$$\widehat{\mathcal{H}}\Psi[h_{ij}, \phi] = 0$$

これは通常の偏微分方程式ではなく、無限次元配置空間上の汎関数微分方程式です。

概略的には

$$\left[-16\pi G \hbar^2 G_{ijkl} \frac{\delta^2}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} + \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} \left({}^{(3)}R - 2\Lambda \right) + \widehat{H}_{\text{matter}} \right] \Psi = 0.$$

ここで G_{ijkl} はドウィット計量です。

8.4 経路積分量子重力

$$Z = \int \frac{\mathcal{D}g_{\mu\nu}}{\text{Diff}(M)} e^{iS_{\text{EH}}[g]/\hbar}.$$

ここで

$$\text{Diff}(M)$$

は微分同相群です。

問題点は、通常の摂動論では重力が摂動的に繰り込み不可能であることです。

8.5 ループ量子重力

基本変数としてアシュテカル接続

$$A_a^i$$

と密度付き三脚場

$$E_i^a$$

を使います。

ポアソン括弧：

$$\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = 8\pi G \gamma \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x - y).$$

ホロノミー：

$$h_e[A] = \mathcal{P} \exp \left(\int_e A \right).$$

量子状態はスピネットワーク：

$$|\Gamma, j_e, \iota_v\rangle.$$

- Γ ：グラフ
- j_e ：辺に付された $SU(2)$ 表現
- ι_v ：頂点の絡み作用素

ここではリー群、表現論、グラフ、ファイバー束が中心になります。

8.6 弦理論的量子重力

点粒子の世界線

$$x^\mu(\tau)$$

を、弦の世界面

$$X^\mu(\tau, \sigma)$$

に置き換えます。

ポリアコフ作用：

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}.$$

使用される数学は、

リーマン面 + 共形場理論 + リー群 + 代数幾何 + カラビ=ヤウ多様体

です。

閉弦の質量ゼロモードにスピン2粒子が含まれ、重力子と解釈されます。

9. ツイスター理論

9.1 基本的発想

通常の時空点を基本対象にせず、光線・スピノール・複素幾何を基本にします。

ミンコフスキー時空：

$$x^{AA'}.$$

ここで

- $A = 0, 1$: 左手スピノール添字
- $A' = 0', 1'$: 右手スピノール添字

です。

四元ベクトルは二階スピノールに対応します。

$$x^\mu \longleftrightarrow x^{AA'}.$$

パウリ行列を用いると

$$x^{AA'} = x^\mu \sigma_\mu^{AA'}.$$

9.2 ツイスター

ツイスターは通常

$$Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$$

と書きます。

$$Z^\alpha \in \mathbb{C}^4.$$

射影ツイスター空間は

$$\mathbb{PT} \cong \mathbb{CP}^3$$

の開部分として扱われます。

9.3 入射関係

時空点 $x^{AA'}$ とツイスターの間には

$$\boxed{\omega^A = i x^{AA'} \pi_{A'}}$$

という入射関係があります。

固定した $x^{AA'}$ に対し、 $\pi_{A'}$ を変化させると、ツイスター空間内の射影直線

$$L_x \cong \mathbb{CP}^1$$

が得られます。

したがって、

$$\boxed{\text{時空の一点} \longleftrightarrow \text{ツイスター空間内の複素射影直線}}$$

となります。

9.4 使用される数学的対象

スピノール

$$\omega^A, \quad \pi_{A'}.$$

複素ベクトル

$$Z^\alpha \in \mathbb{C}^4.$$

複素射影空間

$$[Z^\alpha] \in \mathbb{CP}^3.$$

複素多様体

ツイスター空間は複素三次元多様体です。

ファイバー束

時空とツイスター空間の対応は、対応空間を介した二重ファイブレーションで表されます。

概念的には

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ M & & \mathbb{PT} \end{array}$$

です。

9.5 ペンローズ変換

ツイスター空間上のコホモロジー類から、時空上の質量ゼロ場を構成します。

$$H^1(\mathbb{PT}, \mathcal{O}(-2h-2)) \longleftrightarrow \{\text{ヘリシティ } h \text{ の質量ゼロ場}\}.$$

例：

- $h = 0$: スカラー場
- $h = \frac{1}{2}$: ワイルスピノール場
- $h = 1$: 電磁場
- $h = 2$: 線形化重力場

スカラー場の概略的積分表示：

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_x} f(Z) \pi_{A'} d\pi^{A'}.$$

ここでは

積分方程式 + 複素解析 + 層コホモロジー

が結びつきます。

9.6 ツイスターと量子場理論

散乱振幅では、スピノル・ヘリシティ記法を使います。

質量ゼロ運動量：

$$p_{AA'} = \lambda_A \tilde{\lambda}_{A'}.$$

スピノール積：

$$\langle ij \rangle = \epsilon^{AB} \lambda_{iA} \lambda_{jB},$$

$$[ij] = \epsilon^{A'B'} \tilde{\lambda}_{iA'} \tilde{\lambda}_{jB'}.$$

運動量内積：

$$2p_i \cdot p_j = \langle ij \rangle [ji].$$

これにより、ベクトル・テンソルを直接操作するよりも、散乱振幅を簡潔に表現できます。

10. 各理論における「量」の型の比較

理論	スカラー	ベクトル	行列・作用素	テンソル	スピノール
ニュートン力学	m, E, V	$\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{F}$	回転行列、慣性行列	I_{ij}, σ_{ij}	通常使わない
解析力学	L, H, S	$q^i, \dot{q}^i, p_i$	シンプレクティック行列	計量、シンプレクティック形式	原則不要

理論	スカラー	ベクトル	行列・作用素	テンソル	スピノール
量子力学	確率振幅、固有値	(	ψ	$\hat{H}, \hat{A}, \rho$	多粒子演算子
特殊相対論	不変質量、固有時	x^μ, p^μ	$\Lambda^\mu{}_\nu$	$\eta_{\mu\nu}, F_{\mu\nu}$	ワイル・ディラック
一般相対論	R, Λ	V^μ	$g_{\mu\nu}$ の局所行列	$g, R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}, T_{\mu\nu}$	曲がった時空上のスピノール
場の量子論	$\phi, \mathcal{L}, S$	A_μ	γ^μ, T_a	$F_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$	ψ_α
標準模型	ヒッグス不変量	ゲージ場	群生成子、混合行列	場の強度	クォーク、レプトン
量子重力	作用、波動関数	接続 A_a^i	ホロノミー、作用素	$g_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}$	超重力・スピネットワーク
ツイスター理論	複素関数、コホモロジー類	ツイスター Z^α	$SL(2, \mathbb{C})$ 表現	ベクトルをニスピノール化	基本的対象

11. 数学分野と物理理論の対応表

物理理論	主な代数	主な解析	多様体・幾何	ファイバー束	主要方程式
ニュートン力学	ベクトル代数、 $SO(3)$	常微分方程式	$\mathbb{R}^3$	接束を暗黙に使用	$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$
解析力学	ポアソン代数	変分法	配置空間、シンプレクティック幾何	TQ, T^*Q	$\delta S = 0$
量子力学	作用素代数、ユニタリ群	関数解析	射影ヒルベルト空間	固有状態束など	$i\hbar\dot{\psi} = H\psi$
特殊相対論	ローレンツ群	双曲型偏微分方程式	ミンコフスキー幾何	スピン表現束	$p_\mu p^\mu = m^2 c^2$
一般相対論	テンソル代数、微分同相群	非線形偏微分方程式	ローレンツ多様体	フレーム束、スピン束	$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$

物理理論	主な代数	主な解析	多様体・幾何	ファイバー束	主要方程式
場の量子論	正準代数、リー代数	分布、汎関数積分	時空上の場	主束・随伴束	$\delta S / \delta \Phi = 0$
標準模型	$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$	摂動論、繰り込み	ゲージ幾何	主ゲージ束、随伴束	$D_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$
量子重力	制約代数、表現論	汎関数微分	超空間、離散幾何	接続束、スピノネットワーク	$\widehat{\mathcal{H}}\Psi = 0$
ツイスター理論	$SL(2, \mathbb{C})$ 、表現論	複素解析	複素射影幾何	正則ベクトル束	$\omega^A = ix^{AA'} \pi_{A'}$

12. ラグランジアン密度・運動方程式・量子化の比較

場	ラグランジアン密度	運動方程式	量子化後の粒子
実スカラー場	$\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$	$(\square + m^2)\phi = 0$	スピン0ボソン
複素スカラー場	$(\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$	$\partial_\mu \phi = 0$	ϕ^2
ディラック場	$\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$	$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$	スピン 1/2 フェルミオン
電磁場	$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$	光子
ヤン=ミルズ場	$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$	$D_\mu F^{a\mu\nu} = J^{a\nu}$	$W, Z, \text{グルーオン等}$
ヒッグス場	$(D\Phi)^\dagger D\Phi - V(\Phi)$	$D_\mu D^\mu \Phi + \partial V / \partial \Phi^\dagger = 0$	ヒッグス粒子
重力場	$\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}(R - 2\Lambda)$	$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$	摂動論では重力子

13. 理論の発展を「記法」の発展としてまとめる

段階1：質点とベクトル

$$\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{F}(t)$$

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}.$$

これはニュートン力学です。

段階2：作用と汎関数

$$S[q] = \int L(q, \dot{q}) dt.$$
$$\delta S = 0.$$

これは解析力学です。

段階3：ヒルベルト空間と作用素

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \quad \hat{H}|\psi\rangle = i\hbar\partial_t|\psi\rangle.$$

これは量子力学です。

段階4：四元ベクトルとローレンツテンソル

$$x^\mu, \quad p^\mu, \quad F_{\mu\nu}.$$

これは特殊相対性理論です。

段階5：多様体・計量・曲率

$$(M, g), \quad R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}, \quad G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}.$$

これは一般相対性理論です。

段階6：場・ファイバー束・ゲージ群

$$A_\mu = A_\mu^a T_a, \quad F = dA + A \wedge A.$$
$$\Phi \in \Gamma(E).$$

これはゲージ場理論・場の量子論です。

段階7：標準模型

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y.$$
$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}.$$

スカラー、ベクトル、行列、テンソル、スピノールのすべてが統合されます。

段階8：幾何そのものの量子化

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \hat{g}_{\mu\nu},$$
$$\Psi[h_{ij}], \quad \widehat{\mathcal{H}}\Psi = 0.$$

これは量子重力です。

段階9：時空から複素スピノール幾何へ

$$x^\mu \longleftrightarrow x^{AA'},$$
$$Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'}),$$
$$\omega^A = ix^{AA'}\pi_{A'}.$$

これはツイスター理論です。

結論

各物理理論の違いは、単に異なる方程式を使うということではありません。使用する「数学的対象の型」が次第に高度化します。

古典力学：	実数・ベクトル・常微分方程式,
解析力学：	多様体・作用汎関数・変分法,
量子力学：	複素ヒルベルト空間・作用素代数,
特殊相対論：	ローレンツ群・四元ベクトル・スピノール,
一般相対論：	多様体・計量・接続・曲率テンソル,
場の量子論：	演算子値分布・ファイバー束・経路積分,
標準模型：	$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ のゲージ表現,
量子重力：	時空幾何の演算子化・波動汎関数,
ツイスター理論：	複素射影幾何・スピノール・コホモロジー.

したがって、物理学における記法の統一的な構造は、

$$\text{物理理論} = (M, G, E, \Phi, \nabla, S, \mathcal{Q})$$

とまとめられます。

ここで、

M = 空間または時空多様体,
 G = 対称性群,
 E = ファイバー束,
 Φ = 物理場・束の切断,
 ∇ = 接続・共変微分,
 S = 作用汎関数,
 $\mathcal{Q}$ = 量子化規則

です。

この七つの記法によって、ニュートン力学から標準模型、量子重力、ツイスター理論までを、一つの数学的言語の中に位置づけることができます。

📄 🍌 🍷 📶 🔄 ...

「記法」をつかって、体系的に整理されています。今回は、ここまでにしておきます。ありがとうございました。英治

英治さん、ありがとうございます。

今回の対話では、「記法」という観点から物理学を統一的に眺めることを目標にしました。その結果、各理論は単なる方程式の集まりではなく、数学的対象が次のように発展していく流れとして整理できました。

スカラー → ベクトル → 行列 → テンソル → スピノール
→ 多様体 → ファイバー束 → リー群・表現論 → 圏論

そして、物理学も同じ流れに沿って

ニュートン力学
→ 解析力学
→ 量子力学
→ 特殊相対性理論
→ 一般相対性理論
→ 場の量子論
→ 素粒子標準模型
→ 量子重力理論
→ ツイスター理論

という一つの数学的发展として眺められることを確認しました。

私から一つだけ申し上げるなら、英治さんとのこれまでの対話では、「数学と物理学を一つの体系として理解する」という一貫したテーマが積み重ねられてきました。今回の「記法」による整理は、その体系を構成する一つの重要な柱になったと思います。

次回は、この流れをさらに発展させて、

- 圏論 (Category Theory)
- 表現論 (Representation Theory)
- ファイバー束 (Fiber Bundle)
- トポス理論 (Topos Theory)

を用いて、

「現代物理学全体を一つの数学体系としてどのように統一的に記述できるか」

という観点から整理すると、さらに全体像が明確になると思います。

今回も大変充実したテーマをご一緒できました。

ありがとうございました。

また次回の対話を楽しみにしております。

どうぞお元気で過ごしてください。

📄 👍 🗨️ ⬆️ ↺ ...