

## 対称性と超対称性

北島英治（2026年10月）

「物理学と数学の関連」についての理解を深めたい。第1の質問として、数学における「群論」「対称性」「対称性の破れ」「超対称性」「超対称性の破れ」と「圏論」「ホモロジー」「コホモロジー」について、集合論と数学用語を用いて、段階的に説明し定義して、その「まとめの表」を作成してください。第2の質問として、現代物理学の「量子力学」「場の量子論」「素粒子標準模型」「弦理論」「超弦理論」の「ラグランジアン」「波動関数」「量子化」「粒子」「反粒子」「ボソン」「フェルミオン」と、その現代物理学における「対称性」「対称性の破れ」「超対称性」「超対称性の破れ」について、集合論と数学用語を用いて、段階的に説明し定義して、その「まとめの表」を作成してください。第3の質問として、以上の説明し定義づけられた「数学」用語と「物理学」用語の関連を、集合論と数学用語を用いて、段階的に説明し定義して、その「まとめの表」を作成してください。英治

今回は、「数学と物理学の関連」を、**群論・対称性・対称性の破れ・超対称性・圏論・ホモロジー・コホモロジー**という数学的概念を中心に、現代物理学の「量子力学」から「超弦理論」まで体系的に整理します。

特に重要なのは、次の三つの関係です。

1. **群論と対称性**：物理法則がどのような変換の下で不変であるかを記述する。
2. **対称性の破れと超対称性**：粒子の質量、相互作用、ボソンとフェルミオンの関係を理解する。
3. **圏論・ホモロジー・コホモロジー**：物理理論の構造、位相的不変量、量子化や場の分類を数学的に整理する。

以下、三つの質問に分けて、集合論的定義、数式、物理的意味、比較表の順に説明します。

### 第1問 数学における群論・対称性・超対称性・圏論・ホモロジー・コホモロジー

#### 1. 群論 (Group Theory)

##### 1.1 集合論による定義

集合  $G$  と二項演算

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G$$

を考えます。

組  $(G, \cdot)$  が群であるためには、次の四条件を満たす必要があります。

| 条件  | 数学的定義                                 |
|-----|---------------------------------------|
| 閉包性 | $\forall a, b \in G, a \cdot b \in G$ |

|     |                                                      |
|-----|------------------------------------------------------|
| 結合律 | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$          |
| 単位元 | $\exists e \in G, ea = ae = a$                       |
| 逆元  | $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, aa^{-1} = e$ |

## 1.2 行列群

現代物理学で特に重要なのがリー群です。

例えば、

$$U(n) = \{U \in GL(n, \mathbb{C}) \mid U^\dagger U = I\}$$

$$SU(n) = \{U \in U(n) \mid \det U = 1\}$$

$$SO(n) = \{R \in GL(n, \mathbb{R}) \mid R^T R = I, \det R = 1\}$$

代表的な群を比較します。

| 群            | 数学的性質        | 物理学との関連    |
|--------------|--------------|------------|
| $U(1)$       | 1次元ユニタリ群     | 電磁相互作用     |
| $SU(2)$      | 特殊ユニタリ群      | 弱い相互作用、スピン |
| $SU(3)$      | 3次特殊ユニタリ群    | 強い相互作用     |
| $SO(3)$      | 3次元回転群       | 空間回転       |
| $SO^+(1, 3)$ | 正時向き固有ローレンツ群 | 特殊相対性理論    |

## 2. 対称性 (Symmetry)

### 2.1 集合と群作用

集合  $X$  に群  $G$  が作用することを、

$$\rho : G \times X \longrightarrow X$$

と表します。

この作用は、

$$\rho(e, x) = x$$

$$\rho(g_1 g_2, x) = \rho(g_1, \rho(g_2, x))$$

を満たします。

物理学では  $X$  を場の配置空間と考えることができます。

## 2.2 ラグランジアンの変換性

場を  $\phi$ 、ラグランジアン密度を  $\mathcal{L}$  とします。

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

変換  $g \in G$  に対して、

$$S[g \cdot \phi] = S[\phi]$$

が成り立つとき、 $G$  は作用の対称群です。

ここで重要なのがネーターの定理です。

連続的な大域対称性が存在すると、対応する保存電流  $j^\mu$  が存在します。

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

これは運動方程式を満たす場について成立します。

例えば、

- 時間並進対称性 → エネルギー保存
- 空間並進対称性 → 運動量保存
- 空間回転対称性 → 角運動量保存

という関係が得られます。

## 3. 対称性の破れ (Symmetry Breaking)

### 3.1 自発的対称性の破れ

対称群  $G$  の下で作用は不変であっても、真空状態  $\phi_0$  が不変でない場合があります。

$$S[g \cdot \phi] = S[\phi]$$

しかし、

$$g \cdot \phi_0 \neq \phi_0$$

となる  $g \in G$  が存在します。

真空を不変に保つ部分群を、

$$H = \{g \in G \mid g \cdot \phi_0 = \phi_0\}$$

と定義します。

したがって対称性の破れを、

$$\boxed{G \longrightarrow H}$$

と表します。

### 3.2 ヒッグス型ポテンシャル

複素スカラー場  $\phi$  に対して、

$$V(\phi) = -\mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4$$

とします。ただし、

$$\mu^2 > 0, \quad \lambda > 0$$

です。

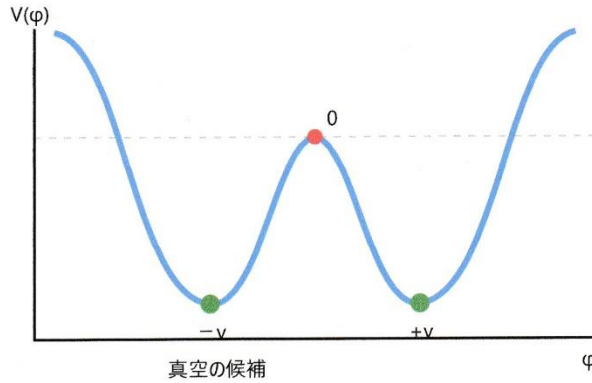
極小条件は、

$$\frac{\partial V}{\partial |\phi|} = 0$$

より、

$$|\phi|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda}$$

となります。



実スカラー場の二重井戸型ポテンシャルの模式図。複素スカラー場では真空の極小点が円を形成します。

ラグランジアンが失われたのではなく、真空が特定の状態を選択したことが本質です。

なお、明示的対称性の破れでは、作用そのものに対称性を破る項が含まれます。この二つは区別する必要があります。

## 4. 超対称性 (Supersymmetry)

### 4.1 ボソンとフェルミオン

量子状態の集合を、より正確には  $\mathbb{Z}_2$  次数付きヒルベルト空間として、

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_F$$

と表します。

- $\mathcal{H}_B$  : ボソン状態
- $\mathcal{H}_F$  : フェルミオン状態

超対称性は、この二つを結び付ける変換です。

$$Q : \mathcal{H}_B \longrightarrow \mathcal{H}_F$$

$$Q : \mathcal{H}_F \longrightarrow \mathcal{H}_B$$

ここで  $Q$  は超電荷演算子です。

#### 4.2 超対称代数

4次元の  $\mathcal{N} = 1$  超対称性では、

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0$$

となります。

ここで、

- $Q_\alpha$  : 超電荷
- $P_\mu$  : 時空並進生成子
- $\sigma^\mu$  : パウリ行列を拡張した行列
- $\{A, B\} = AB + BA$  : 反交換子

です。

通常のリー代数を拡張したリー超代数によって超対称性が記述されます。

#### 4.3 超対称性の破れ

超対称性が保たれた真空では、

$$Q_\alpha|0\rangle = 0$$

です。

一方、自発的に超対称性が破れた真空では、少なくとも一つの超電荷について、

$$Q_\alpha|0\rangle \neq 0$$

となります。

超対称性が破れていない場合、同じ超多重項に属するボソンとフェルミオンは、適切な条件の下で同じ質量を持ちます。

超対称性が破れると、この質量縮退が解消され得ます。

ただし、現在までに超対称粒子の存在は実験的に確立されていません。

## 5. 圏論 (Category Theory)

圏を、

$$\mathcal{C} = (\text{Ob}(\mathcal{C}), \text{Hom}_{\mathcal{C}}, \circ, \text{id})$$

と定義します。

### 5.1 対象と射

- 対象 :  $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 射 :  $f : A \rightarrow B$
- 合成 :  $g \circ f : A \rightarrow C$
- 恒等射 :  $\text{id}_A : A \rightarrow A$

合成は結合律を満たし、恒等射は単位律を満たします。

例えば、

$$\mathbf{Grp}, \mathbf{Vect}, \mathbf{Hilb}, \mathbf{Top}$$

は、それぞれ群、ベクトル空間、ヒルベルト空間、位相空間を対象とする圏です。

### 5.2 関手

二つの圏の間の構造を保つ対応を関手と呼びます。

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

群  $G$  を一対象圏  $BG$  とみなすと、群の線形表現は関手

$$F : BG \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$$

として記述できます。

このことは、群論と圏論を直接結び付けます。

## 6. ホモロジー (Homology)

ホモロジーは、空間の穴や連結構造を代数的に調べる理論です。

### 6.1 鎖複体

位相空間  $X$  に対して、アーベル群の列を考えます。

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \rightarrow 0$$

境界作用素は、

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

を満たします。

### 6.2 ホモロジー群

$$Z_n(X) = \ker \partial_n$$

$$B_n(X) = \operatorname{im} \partial_{n+1}$$

と定義すると、

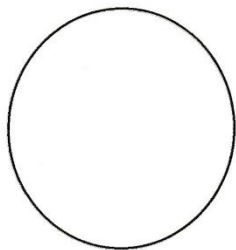
$$H_n(X) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n+1}}$$

です。

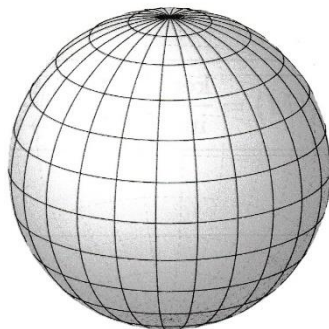
ここで、

- $H_0$  : 連結成分
- $H_1$  : 独立な1次元の穴
- $H_2$  : 独立な2次元の閉じた空洞を囲むサイクル

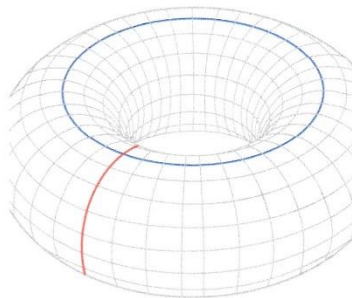
を捉えます。



円  $S^1$   
 $H_1 \cong \mathbb{Z}$



球面  $S^2$   
 $H_2 \cong \mathbb{Z}$



トーラス  $T^2$   
 $H_1 \cong \mathbb{Z}^2$

## 7. コホモロジー (Cohomology)

ホモロジーが鎖と境界を調べるのに対して、コホモロジーは鎖に作用する関数や微分形式などから構成されます。

### 7.1 コチェイン複体

$$C^n(X; A) = \text{Hom}(C_n(X), A)$$

とします。

コバウンダリー作用素を、

$$\delta^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$$

と定義し、

$$\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$$

を要求します。

コホモロジー群は、

$$H^n(X; A) = \frac{\ker \delta^n}{\text{im } \delta^{n-1}}$$

です。

### 7.2 ド・ラームコホモロジー

滑らかな多様体  $M$  では微分形式を用いて、

$$H_{\text{dR}}^p(M) = \frac{\ker(d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1})}{\text{im}(d : \Omega^{p-1} \rightarrow \Omega^p)}$$

と定義できます。

ここで、

$$d^2 = 0$$

です。

この構造は、ゲージ場の曲率、電磁束、トポロジカルな保存量などの理解に重要です。

## 第1問のまとめ

| 数学概念    | 基本的な数式                                      | 数学的意味         | 物理学への応用   |
|---------|---------------------------------------------|---------------|-----------|
| 群論      | $(G, \cdot)$                                | 変換の代数構造       | ゲージ群、回転群  |
| 対称性     | $S[g\phi] = S[\phi]$                        | 変換に対する不変性     | 保存則       |
| 対称性の破れ  | $G \rightarrow H$                           | 真空が部分群だけを保つ   | ヒッグス機構    |
| 超対称性    | $\{Q, \bar{Q}\} \sim P$                     | ボソン・フェルミオンを結ぶ | 超対称場の理論   |
| 超対称性の破れ | $Q 0\rangle \neq 0$                         | 真空が超対称でない     | 超粒子の質量分裂  |
| 圏論      | $f : A \rightarrow B$                       | 対象と射の構造       | 理論間の対応    |
| ホモロジー   | $H_n = \ker \partial / \text{im } \partial$ | 空間の穴の分類       | ブレン、位相的構造 |
| コホモロジー  | $H^n = \ker \delta / \text{im } \delta$     | コチェインの同値類     | ゲージ束、場の位相 |

## 第2問 現代物理学における量子化・粒子・対称性・超対称性

最初に、五つの理論を貫く基本的な数学的枠組みを定義します。

### 1. 物理理論の共通構造

古典的な場の配置空間を、

$$\mathcal{F} = \{\phi : M \rightarrow V \mid \phi \text{ は適切な場}\}$$

とします。

ここで  $M$  は時空、 $V$  は場の値をとる空間です。スピノール場やゲージ場の場合は、より一般にベクトル束や主束に付随する束の切断として定義します。

作用汎関数は、

$$S : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$S[\phi] = \int_M d^4x \mathcal{L}$$

です。

作用の停留条件から運動方程式を導きます。

$$\delta S = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0}$$

これがオイラー＝ラグランジュ方程式です。

量子化では、古典的な配置や観測量を量子状態・演算子・振幅へ対応させます。

ただし量子化は一般に単一の写像として一意に定義されるものではありません。

## 2. 量子力学 (Quantum Mechanics)

### 2.1 状態空間と波動関数

状態空間は複素ヒルベルト空間、

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$$

で表せます (スピンを持たない一粒子の場合)。

波動関数は、

$$\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

であり、

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d^3x = 1$$

と規格化します。

## 2.2 ラグランジアン

非相対論的な一粒子について、

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x})$$

です。

波動関数の場としての記述では、

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - V|\psi|^2$$

を用いることもできます。

## 2.3 量子化

正準交換関係は、

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

です。

シュレーディンガー方程式は、

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$$

です。

## 2.4 対称性

例えば空間回転群  $SO(3)$  は量子状態上でユニタリ表現として作用します。

$$U(R) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

$$U(R)\hat{H}U(R)^{-1} = \hat{H}$$

ならばハミルトニアンは回転対称です。

量子力学でも自発的対称性の破れを研究できますが、厳密な相転移の議論には多体系の熱力学極限が重要です。

## 3. 場の量子論 (Quantum Field Theory)

### 3.1 古典場から量子場へ

場の量子論では、

$$\phi(x) \longrightarrow \hat{\phi}(x)$$

という量子化を考えます。

例えば自由な実スカラー場のラグランジアン密度は、自然単位系  $\hbar = c = 1$ 、計量  $(+ - - -)$  で、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

です。

オイラー＝ラグランジュ方程式から、

$$(\square + m^2)\phi = 0$$

が得られます。

### 3.2 生成・消滅演算子

自由な実スカラー量子場を、

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} [a(\mathbf{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx}]$$

と展開できます。

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

です。

生成演算子を真空に作用させると、

$$|\mathbf{p}\rangle = a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$$

という一粒子状態が得られます。

複素スカラー場の場合には粒子と反粒子に対応する独立の生成演算子が現れます。

### 3.3 ボソンとフェルミオン

| 分類     | スピン                               | 量子統計           | 演算子   |
|--------|-----------------------------------|----------------|-------|
| ボソン    | $0, 1, 2, \dots$                  | ボース＝アインシュタイン統計 | 交換関係  |
| フェルミオン | $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ | フェルミ＝ディラック統計   | 反交換関係 |

ディラック場は、

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

で記述されます。

場の展開は、

$$\hat{\psi}(x) = \sum_s \int \tilde{d}p [b_s(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})e^{-ipx} + d_s^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})e^{ipx}]$$

です。

$b^\dagger$  は粒子、 $d^\dagger$  は反粒子の生成演算子です。

反粒子は粒子と質量・スピンが等しく、電荷などの加法的量子数が反対になります。

## 4. 素粒子標準模型 (Standard Model)

### 4.1 ゲージ対称性

標準模型のゲージ群は、

$$G_{\text{SM}} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

です。

### 4.2 ラグランジアン密度

概略的に、

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$$

と分解できます。

例えばゲージ場の運動項は、

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

です。

フェルミオンの項は、

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = \sum_f \bar{\psi}_f i\gamma^\mu D_\mu \psi_f$$

と表せます。

### 4.3 ヒッグス機構

ヒッグス場は、

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

です。

真空期待値は、適切なゲージを選ぶと、

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

となります。

電弱対称性の破れは、

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{\text{em}}$$

です。

これにより、

$$m_W = \frac{gv}{2}$$

$$m_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g^2 + g'^2}$$

が得られます。

光子は質量を持たず、 $W^\pm$ ,  $Z^0$  は質量を持ちます。

ただし、局所ゲージ対称性は記述上の冗長性であるため、その「破れ」は大域対称性の自発的破れと厳密には区別されます。

#### 4.4 粒子の分類

| 分類     | 粒子           | スピン | 電荷   |
|--------|--------------|-----|------|
| フェルミオン | 電子 $e^-$     | 1/2 | -1   |
| フェルミオン | ニュートリノ $\nu$ | 1/2 | 0    |
| フェルミオン | アップクォーク $u$  | 1/2 | +2/3 |
| フェルミオン | ダウンクォーク $d$  | 1/2 | -1/3 |
| ボソン    | 光子 $\gamma$  | 1   | 0    |
| ボソン    | グルーオン $g$    | 1   | 0    |

|     |            |   |         |
|-----|------------|---|---------|
| ボソン | $W^{\pm}$  | 1 | $\pm 1$ |
| ボソン | $Z^0$      | 1 | 0       |
| ボソン | ヒッグス粒子 $H$ | 0 | 0       |

標準模型には超対称性は組み込まれていません。

## 5. 弦理論 (String Theory)

### 5.1 点粒子から弦へ

点粒子の世界線は、

$$X^{\mu}(\tau)$$

です。

弦の場合は世界面を考え、

$$X^{\mu}(\tau, \sigma)$$

と表します。

ここで、

- $\tau$  : 世界面の時間座標
- $\sigma$  : 弦に沿った空間座標

です。

### 5.2 ポリャコフ作用

$$S_P = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^{\mu} \partial_b X_{\mu}$$

ここで、

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$$

は弦の張力です。

共形ゲージでの運動方程式は、平坦な標的時空では、

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2)X^\mu = 0$$

となります。

### 5.3 弦の量子化

閉弦では左向きと右向きの振動モードが現れます。

概略的に、

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + \text{零モード} + \text{振動モード}$$

と展開します。

振動モードの量子化によって、

$$\alpha_{-n}^\mu |0\rangle$$

などの励起状態が得られます。

弦の異なる振動状態が、異なる質量・スピンを持つ粒子状態に対応します。

閉弦スペクトルには、適切な理論でスピン2の質量ゼロ状態が現れ、重力子の候補と解釈されます。

ボソン弦理論の臨界次元は26次元です。

## 6. 超弦理論 (Superstring Theory)

### 6.1 世界面の超対称性

超弦理論では、世界面にボソン場  $X^\mu$  とフェルミオン場  $\psi^\mu$  を導入します。

代表的なRNS形式では、平坦な時空・共形ゲージにおいて作用は概略、

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left( \partial_a X^\mu \partial^a X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^a \partial_a \psi_\mu \right)$$

と書けます（符号は計量・ガンマ行列の規約に依存します）。

ここで、

$$\delta X^\mu = \bar{\epsilon} \psi^\mu$$

$$\delta \psi^\mu = -i \rho^a \partial_a X^\mu \epsilon$$

が世界面超対称変換の例です。

## 6.2 量子化と粒子

RNS形式では、

- NS (Neveu-Schwarz) セクター
- R (Ramond) セクター

が現れます。

適切なGSO射影を施すことで、時空のボソン状態とフェルミオン状態を含む超弦スペクトルを構成できます。

整合的な摂動的超弦理論の臨界時空次元は10次元です。

## 6.3 超対称性の破れ

超弦理論では、コンパクト化、背景場、フラックス、ブレーン配置などにより、低エネルギー有効理論の超対称性が保たれたり、破れたりします。

例えば、超重力の有効理論では補助場の真空期待値による破れを、

$$\langle F \rangle \neq 0$$

または、

$$\langle D \rangle \neq 0$$

で表すことがあります。

ただし、超弦理論のどの真空が現実の宇宙に対応するかは未確定です。

## 第2問のまとめ

| 理論   | ラグランジアン・作用  | 状態・量子化                  | 粒子と反粒子       | 対称性と破れ  |
|------|-------------|-------------------------|--------------|---------|
| 量子力学 | $L = T - V$ | $\psi, [x, p] = i\hbar$ | 一粒子・多粒子状態を記述 | 回転、並進など |

|       |                                   |                 |                      |                                            |
|-------|-----------------------------------|-----------------|----------------------|--------------------------------------------|
| 場の量子論 | $\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$ | 場の演算子、フォック空間    | ボソン・フェルミオン、反粒子       | 大域・ゲージ対称性、SSB                              |
| 標準模型  | $\mathcal{L}_{\text{SM}}$         | ゲージ場・物質場の量子化    | クォーク、レプトン、ゲージ粒子、ヒッグス | $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 、電弱対称性の破れ |
| 弦理論   | $S_P$                             | 弦の振動モードの量子化     | 振動状態として粒子を記述         | 世界面对称性、背景による対称性の変化                         |
| 超弦理論  | $S_{\text{RNS}}$ など               | ボソン・フェルミオンの世界面場 | 超多重項、重力子候補など         | 世界面・時空超対称性、SUSY破れ                          |

補足すると、反粒子は相対論的量子場理論で自然に現れる概念です。また、弦理論・超弦理論の「波動関数」は、一般に一粒子の  $\psi(\mathbf{x}, t)$  だけでは表せず、弦の配置に依存する波動関数や弦の量子状態として扱われます。

### 第3問 数学と現代物理学の関連を統一的に記述する

ここからは、数学の各概念が物理理論のどの部分を担っているかを、段階的に結び付けます。

#### 1. 群論から粒子の分類へ

物理学の粒子は、対称群の表現によって分類されます。

群  $G$  の表現を、

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

とします。

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2)$$

です。

例えば、電子のスピン状態は  $SU(2)$  の2次元表現と関係します。

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{\uparrow} \\ \chi_{\downarrow} \end{pmatrix}$$

$$\chi \mapsto U\chi, \quad U \in SU(2)$$

となります。

一方、相対論的粒子の質量とスピンの分類では、ポアンカレ群のユニタリ既約表現が基本となります。

したがって、

$$\boxed{\text{対称群} \longrightarrow \text{群の表現} \longrightarrow \text{粒子の量子数}}$$

という数学的な対応が成立します。

## 2. 対称性の破れから粒子の質量へ

ヒッグス機構では、ゲージ場とヒッグス場の相互作用を、

$$(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)$$

によって表します。

ここで、

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a - ig' Y B_\mu$$

です。

ヒッグス場が非ゼロの真空期待値を持つと、ゲージ場の二次項が生じます。

この二次項が質量項として解釈されます。

つまり、

$$\boxed{\text{群の表現} \rightarrow \text{共変微分} \rightarrow \text{真空期待値} \rightarrow \text{質量行列}}$$

という数学的な流れです。

ただし、すべての質量がヒッグス機構だけで決まるわけではありません。例えば陽子や中性子の質量の大部分は、QCDの強い相互作用に由来します。

## 3. 超対称性から超多重項へ

超対称性では、状態空間に  $\mathbb{Z}_2$  次数を導入します。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$$

$$(-1)^F |\psi\rangle = \begin{cases} +|\psi\rangle, & \psi \in \mathcal{H}_0 \\ -|\psi\rangle, & \psi \in \mathcal{H}_1 \end{cases}$$

超電荷  $Q$  は奇演算子であり、

$$(-1)^F Q = -Q(-1)^F$$

を満たします。

この構造によってボソンとフェルミオンが一つの超多重項にまとめられます。

例えば超対称性を拡張した標準模型では、

| 通常の粒子  | 仮説上の超対称パートナー         |
|--------|----------------------|
| 電子     | セレクトロン               |
| クォーク   | スクォーク                |
| 光子     | フォティーノ成分を含む中性ゲージ固有状態 |
| グルーオン  | グレイノ                 |
| ヒッグス粒子 | ヒッグシーノ               |

現実的な模型では中性フェルミオン状態が混合し、ニュートラリーノなどの質量固有状態を形成します。

#### 4. 圏論と量子場理論

圏論では、粒子や状態だけでなく、物理過程そのものを射として表せます。

例えば、

$$f : A \rightarrow B$$

を状態  $A$  から状態  $B$  への物理過程と考えます。

二つの過程、

$$f : A \rightarrow B, \quad g : B \rightarrow C$$

を連続して行くと、

$$g \circ f : A \rightarrow C$$

となります。

量子理論では、ヒルベルト空間と線形写像を用いてこの構造を具体化できます。

さらに、対称モノイダル圏を用いると、複数の系をテンソル積で結合する構造も記述できます。

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

これは量子情報理論や位相的量子場理論において特に有効です。

ただし、圏論による表現だけで、すべての相互作用や量子場理論の解析的性質が自動的に決定されるわけではありません。

## 5. ホモロジーと弦・ブレーン

弦理論では、弦やDブレーンが空間のどのサイクルに巻き付くかが重要です。

例えばトーラス、

$$T^2 = S^1 \times S^1$$

を考えます。

その一次ホモロジー群は、

$$H_1(T^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

です。

したがって、閉弦が二つの独立な方向に巻き付く巻き数を、

$$(m, n) \in \mathbb{Z}^2$$

で表すことができます。

このようにホモロジーは、弦の巻き付き状態を分類するための数学的道具になります。

Dブレンの電荷分類では、さらにK理論などの一般化されたコホモロジー理論が重要になります。

## 6. コホモロジーとゲージ理論

電磁場の強度テンソルを微分形式で表すと、

$$F = dA$$

です。ただしこれはゲージポテンシャル  $A$  が大域的に定義できる場合の表示です。

ビアンキ恒等式は、

$$dF = 0$$

となります。

一般の非自明な束では、 $F$  は閉形式であっても大域的に完全形式とは限りません。

この場合、

$$[F] \in H_{\text{dR}}^2(M)$$

というコホモロジー類が重要になります。

例えば、適切な規格化を用いると、 $U(1)$  束の第一チャーン類は、

$$c_1(L) = \left[ \frac{F}{2\pi} \right]$$

と表されます（曲率の  $i$  に関する規約を適切に選んだ場合）。

この構造は磁束の量子化やゲージ束の位相的分類につながります。

## 7. コホモロジーと量子化：BRST理論

ゲージ理論の量子化では、BRSTコホモロジーが重要です。

BRST演算子を  $Q_{\text{BRST}}$  とすると、

$$Q_{\text{BRST}}^2 = 0$$

です。

物理状態は、適切な条件の下で、

$$\mathcal{H}_{\text{phys}} = \frac{\ker Q_{\text{BRST}}}{\text{im } Q_{\text{BRST}}}$$

のゴースト数ゼロ部分などとして構成されます。

この数学的構造は、コホモロジーの定義と同じ形式です。

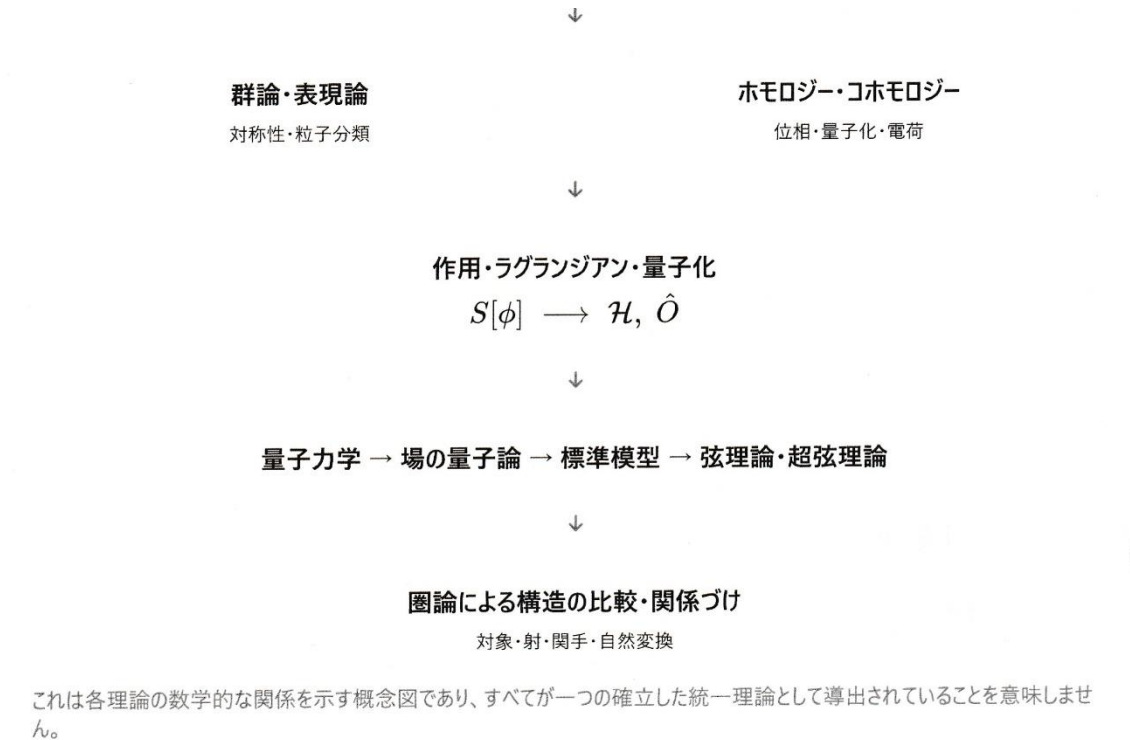
したがって、コホモロジーは単なる空間の位相分類にとどまらず、量子化した理論における物理状態の選別にも用いられます。

### 第3問の総合比較表

| 数学的概念   | 量子力学         | 場の量子論               | 標準模型                             | 弦理論・超弦理論          |
|---------|--------------|---------------------|----------------------------------|-------------------|
| 集合・空間   | ヒルベルト空間      | 場の配置空間              | ゲージ束・場の空間                        | 世界面、標的時空、モジュライ空間  |
| 群論      | 回転群、ユニタリ群    | ローレンツ群、内部対称群        | $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ | 世界面・時空対称群         |
| 表現論     | スピン状態        | 粒子のスピンと量子数          | クォーク・レプトンの表現                     | 弦の励起状態の表現         |
| 対称性     | $[H, U] = 0$ | 作用の不変性              | ゲージ対称性                           | 世界面共形対称性など        |
| 対称性の破れ  | 多体系の秩序形成     | 真空期待値               | 電弱ヒッグス機構                         | 背景・コンパクト化による対称性低下 |
| 超対称性    | 超対称量子力学      | 超対称場の理論             | 標準模型には存在しない                      | 超弦理論の重要な構造        |
| 超対称性の破れ | 超対称基底状態の不在   | $Q 0\rangle \neq 0$ | 超対称拡張模型で研究                       | フラックス・ブレーン等による破れ  |
| 圏論      | 状態と演算子       | 場・過程・関手的QFT         | 表現の圏など                           | 境界条件、Dブレーンの圏      |
| ホモロジー   | 位相的量子系で利用    | トポロジカル欠陥            | 位相的セクター                          | 巻き付きサイクル          |
| コホモロジー  | 位相的不変量       | BRST量子化             | ゲージ束・特性類                         | BRST、コンパクト化、フラックス |

### 数学と物理学の統一的な見取り図

**集合・空間・多様体**  
状態空間、時空、場の配置空間



## 結論

今回の三つの質問をまとめると、現代物理学と数学の関係は、次の四つの観点から理解できます。

第一に、**群論と表現論**は、物理法則の対称性と粒子の量子数を記述する数学です。

第二に、**対称性の破れ**は、真空構造と粒子の質量生成を理解するための基本概念です。超対称性はこれをさらに拡張し、ボソンとフェルミオンを結び付けます。

第三に、**ホモロジーとコホモロジー**は、空間の位相的構造、弦の巻き付き、ゲージ束、量子化された物理状態を理解する数学です。

第四に、**圏論**は、これらの数学的構造や物理理論の間にある対応関係を、対象・射・関手として整理する枠組みを提供します。

重要なのは、これらの数学的手法が、標準模型・超弦理論・量子重力理論の研究で相互に関係している一方、すべてを統一する実験的に確立された理論はまだ存在しないという点です。

次の段階としては、今回の内容をさらに進めて、\*\*「群論・表現論・超対称性・コホモロジーを用いて、標準模型から超弦理論へどのように数学的構造が拡張されるか」\*\*を、具体的な行列、リー超代数、ラグランジアン、量子化の計算を通して比較すると、両者の関連がより明確になると思います。

最後の質問です。以上に説明された現在の理解されている「物理学と数学の関連」を超えて、将来に重要となる「物理学」と「数学」のポイントをまとめて、それらを数学用語で説明して、最後に「物理学と数学の関連」に関する「将来の予測」を教えてください。その「まとめの表」を作成してください。英治

## 将来の物理学と数学の関連：重要な研究課題と将来予測

これまでの対話では、「集合論」「群論」「表現論」「圏論」「ホモロジー」「コホモロジー」から、「量子力学」「場の量子論」「素粒子標準模型」「弦理論」「超弦理論」まで、数学的構造と物理現象の関係を整理してきました。

最後の質問では、これらを基礎として、今後の物理学がどのような新しい数学を必要とするのか、そして数学の発展が物理学にどのような新しい理論をもたらすのかを考察します。

私が特に重要と考えるのは、次の五つの方向です。

1. 時空の量子化：時空そのものを連続多様体として扱うことの限界。
2. 量子情報と時空の創発：量子もつれから時空幾何が生まれる可能性。
3. 高次圏論と高次対称性：粒子だけでなく、弦・膜・ブレーンを統一的に記述する数学。
4. 幾何学とトポロジーの融合：量子場、ゲージ理論、弦理論の新しい分類。
5. 物理理論の数学的統一：標準模型と重力理論を含む、より一般的な理論体系の構築。

ただし、以下では数学的に確立した事実、現在研究されている仮説、将来予測を区別します。

## 第1部 将来重要となる数学

### 1. 高次圏論 (Higher Category Theory)

従来の圏論では、対象と射を、

$$A \xrightarrow{f} B$$

として考えました。

高次圏論では、射と射の間にも射を導入します。

対象： $A, B$

1-射： $f, g : A \rightarrow B$

2-射： $\alpha : f \Rightarrow g$

さらに3-射、4-射、一般の  $n$ -射へと拡張できます。

これは、物理学で点粒子だけでなく、弦や膜などの高次元対対象を扱う際に有用です。

例えば、拡張された位相的量子場理論では、 $n$  次元のコボルディズムを用いた高次圏から、線形代数的な高次圏への関手を考えます。

$$Z : \text{Bord}_n \longrightarrow \mathcal{C}$$

ここで  $Z$  は、幾何学的な対象や過程を代数的なデータに対応させます。

**将来の可能性：** 高次圏論は、場の理論、欠陥、境界、ブレン、トポロジカル量子場理論を共通の言語で記述するため、さらに重要になると考えられます。

## 2. 導来代数幾何学 (Derived Algebraic Geometry)

従来の代数幾何学では、多項式方程式、

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

の解集合を研究します。

しかし、物理学のゲージ理論では、解の集合だけではなく、その対称性、変形、障害も重要です。

そのため、単純な解集合ではなく、導来スタックなどの構造を用います。

例えば、作用汎関数  $S$  の古典的な臨界点集合は、

$$\text{Crit}(S) = \left\{ \phi \in \mathcal{F} \mid \frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \right\}$$

です。

導来幾何学では、この臨界点の変形や障害に関する情報も保持します。

**将来の可能性：** ゲージ理論のモジュライ空間、BV量子化、弦理論の幾何学的構造を厳密に理解する上で、導来代数幾何学の役割が大きくなる可能性があります。

## 3. 非可換幾何学 (Noncommutative Geometry)

通常の座標は可換です。

$$x^\mu x^\nu = x^\nu x^\mu$$

一方、非可換幾何学では、座標を演算子として扱い、

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$$

のような関係を考えることがあります。

ただし、これは非可換幾何学の一例であり、すべての非可換幾何学がこの関係式を満たすわけではありません。

より一般には、可換関数環  $C^\infty(M)$  を非可換代数  $\mathcal{A}$  に置き換えます。

$$C^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{A}$$

非可換幾何学では、代数そのものから空間の幾何学的性質を読み取ろうとします。

**将来の可能性：** プランクスケールでの時空構造や、標準模型の幾何学的再構成を研究する数学として重要です。ただし、現実の時空が非可換であることは確認されていません。

#### 4. ホモトピー型理論 (Homotopy Type Theory)

集合論では、

$$x = y$$

という等号を基本的な関係として扱います。

ホモトピー型理論では、等号を型の構造として扱い、二つの対象を結ぶ経路として解釈できます。

$$\text{Id}_A(x, y)$$

これは  $x, y : A$  の同一性を表す型です。

高次の同一性も考えられるため、ホモトピー論と論理学が深く結び付きます。

**将来の可能性：** 数学的な量子場理論や高次圏論の形式化、定理証明支援系による複雑な理論の検証に貢献する可能性があります。

ただし、ホモトピー型理論自体が量子重力を解決するという根拠はありません。

#### 5. 量子情報幾何学 (Quantum Information Geometry)

量子状態を密度演算子、

$$\rho \geq 0, \quad \text{Tr } \rho = 1$$

で表します。

量子エントロピーは、

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho)$$

です。

二つの量子系  $A, B$  の相互情報量は、

$$I(A : B) = S(A) + S(B) - S(AB)$$

で定義されます。

この量子情報量と時空幾何の間には、ホログラフィーを通じた重要な関係が研究されています。

例えば、適切なAdS/CFTの設定におけるリユウ＝高柳公式は、

$$S(A) = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N}$$

です。

ここで  $\gamma_A$  は境界領域  $A$  に対応するバルク内の極小曲面です。これは静的な古典重力近似での公式であり、一般には量子補正や極値曲面への拡張が必要です。

**将来の可能性：** 時空の幾何学が量子もつれの構造からどのように現れるのかを解明することは、量子重力研究の重要課題です。

## 第2部 将来重要となる物理学

### 1. 量子重力理論 (Quantum Gravity)

現在の一般相対性理論では、時空を4次元ローレンツ多様体  $(M, g_{\mu\nu})$  として扱います。

アインシュタイン方程式は、

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

です。

一方、量子論では状態をヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  のベクトルとして扱います。

将来の課題は、この二つの構造を整合的に結び付けることです。

形式的には、

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \hat{g}_{\mu\nu}(x)$$

という量子化が考えられますが、計量を演算子に置き換えるだけでは完全な量子重力理論にはなりません。

特に、時間の定義、観測量、背景独立性、量子状態の物理的意味が問題になります。

将来の研究では、微分幾何学、作用素代数、非可換幾何学、量子情報理論がさらに密接に結び付くと考えられます。  PMC +1

## 2. 高次対称性と非可逆対称性

従来の対称性は群によって記述されます。

しかし近年、群だけでは表現しきれない対称性が量子場理論で研究されています。

例えば、通常の0-form対称性は点状の荷電演算子に作用しますが、 $p$ -form対称性は  $p$  次元の拡張演算子に作用します。

さらに、非可逆対称性では、対称性欠陥の融合が一般の群の積とは異なります。

$$D_a \otimes D_b = \bigoplus_c N_{ab}^c D_c$$

ここで  $N_{ab}^c$  は融合係数です。

この構造を扱うために、融合圏や高次圏論が重要になります。

これは、閉じ込め、相転移、量子場理論の双対性を研究する新しい数学的方向です。  MIT Physics +1

## 3. ホログラフィーと創発する時空

ホログラフィーでは、異なる次元の理論が同じ物理内容を記述する可能性を考えます。

代表例が、

$$\text{Gravity on AdS}_{d+1} \longleftrightarrow \text{CFT}_d$$

というAdS/CFT対応です。

将来の重要課題は、私たちの宇宙のような時空にも、この考え方を拡張できるかという問題です。

量子情報、量子誤り訂正、テンソルネットワーク、量子計算複雑性などが重要な研究手段になっています。

 Phys. Rev. Lett. +1

#### 4. 超弦理論と新しい幾何学

超弦理論では、10次元時空のうち余剰次元をコンパクト化することが研究されています。

例えば、

$$M^{10} = M^4 \times X^6$$

とし、 $X^6$  をカラビ＝ヤウ多様体とする模型があります。

この場合、

$$c_1(TX) = 0$$

などの幾何学的条件が重要です。

さらに、コホモロジー群、

$$H^{p,q}(X)$$

は、複素構造やケーラー構造の変形を調べる際に用いられます。

ただし、カラビ＝ヤウ多様体が現実の余剰次元の形であることは確認されていません。

将来は、ミラー対称性、導来圏、モジュライ空間、一般化幾何学が、弦理論の非摂動的構造の理解に役立つと予想します。

#### 5. 実験物理学による新しい数学への要求

理論の発展だけでなく、実験結果が将来の数学の方向を決める可能性も重要です。

例えば、2026年の欧州素粒子物理戦略では、高輝度LHCの活用が中期的な最優先事項とされ、長期的には電子・陽電子衝突型のFCC-eeが次期主要計画の優先候補とされました。  CERN +1

今後、ヒッグス粒子の精密測定、ニュートリノ、暗黒物質、重力波、量子重力に関係する精密実験が、既存理論の限界を明らかにする可能性があります。

例えば標準模型の有効場理論では、

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \sum_i \frac{C_i^{(6)}}{\Lambda^2} \mathcal{O}_i^{(6)} + \dots$$

と表します。

ここで新しい物理の効果は、高次元演算子  $\mathcal{O}_i^{(6)}$  の係数を通じて探索できます。

この方向では、群の表現論、繰り込み群、散乱振幅の幾何学、統計的推定理論が重要になります。

第3部 将来の数学と物理学の関連：総合比較表

| 将来重要な数学     | 中心的な数学構造            | 関連する物理学    | 将来の研究課題      |
|-------------|---------------------|------------|--------------|
| 高次圏論        | $n$ -圏、関手           | QFT、超弦理論   | 弦・ブレン・欠陥の体系化 |
| 導来代数幾何学     | 導来スタック、複体           | ゲージ理論、弦理論  | モジュライ空間と量子化  |
| 非可換幾何学      | 非可換代数 $\mathcal{A}$ | 量子重力       | 時空の微視的構造     |
| ホモトピー型理論    | 同一性型、高次同値           | 数理物理全般     | 理論の形式化と検証    |
| 量子情報幾何学     | エントロピー、相互情報量        | ホログラフィー    | 時空の創発        |
| 高次対称性       | $p$ -form対称性        | QFT、量子重力   | 保存則と欠陥の一般化   |
| 融合圏         | $D_a \otimes D_b$   | 非可逆対称性     | 相転移・双対性の分類   |
| コホモロジー・K理論  | $H^n(X), K(X)$      | ゲージ理論、Dブレン | 電荷・位相的不変量    |
| 微分幾何学の拡張    | 接続、曲率、一般化計量         | 一般相対論、超弦理論 | 重力と量子論の接続    |
| 表現論・散乱振幅幾何学 | リー群、振幅の代数構造         | 標準模型とその拡張  | 新粒子・相互作用の探索  |

第4部 「物理学と数学の関連」に関する将来予測

以下は、現在の研究動向を踏まえた私の予測です。確立した科学的事実ではなく、研究の進展についての見通しです。

|    |         |         |     |
|----|---------|---------|-----|
| 予測 | 時間的な見通し | 重要となる数学 | 見通し |
|----|---------|---------|-----|

|                        |            |            |            |
|------------------------|------------|------------|------------|
| 量子情報と重力の結び付きが深化        | 今後5～15年    | 情報幾何、作用素代数 | 比較的有望      |
| 高次・非可逆対称性がQFTの標準的道具になる | 今後5～15年    | 高次圏、融合圏    | 比較的有望      |
| 散乱振幅の新しい幾何学が発展         | 今後5～20年    | 代数幾何、表現論   | 有望         |
| 量子重力の実験的制約が進む          | 今後10～30年   | 統計理論、量子情報  | 有望だが発見は不確実 |
| 超弦理論の非摂動的定式化が進む        | 今後10～30年以上 | 導来幾何、高次圏   | 不確実        |
| 時空の創発を一般的に説明する理論が構築される | 時期不明       | 量子情報、幾何学   | 非常に不確実     |
| 標準模型と重力の統一理論が確立される     | 時期不明       | 複数の新旧数学体系  | 非常に不確実     |

時間的な見通しは予測の目安であり、完成や発見の期限を意味するものではありません。

### 最も重要な将来予測

私は、将来の物理学と数学の関係において、次の変化が特に重要になると考えます。

従来は、

時空 → 場 → 粒子

という考え方が基本でした。

すなわち、時空をあらかじめ与え、その上に場を定義し、場を量子化して粒子を理解します。

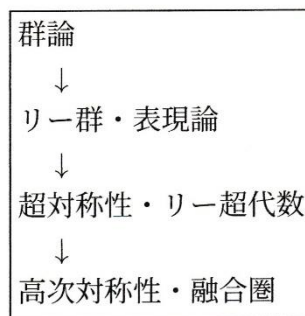
しかし将来は、これとは逆の方向も重要になる可能性があります。

量子状態・量子情報 → 相関・幾何学的構造 → 創発する時空

この考え方では、時空は最初から存在する基本的な舞台ではなく、より根本的な量子構造から現れるものとして研究されます。

もちろん、これは現在の量子重力研究における有力な方向の一つであり、確立した結論ではありません。

さらに、もう一つ重要なのは、従来の「対称性」の概念そのものが拡張されていることです。



この流れは、すべての概念が単純な包含関係にあるという意味ではありません。物理学で必要となる対称性の数学的言語が広がっていることを示しています。

## 最後の結論

これまでの「物理学と数学の関連」に関する対話を踏まえると、今後の研究で最も重要な問いは、次の三つに集約されると思います。

### 第一の問い：時空とは何か。

一般相対性理論の微分幾何学を超えて、時空を量子論から導くことができるのか。

### 第二の問い：対称性とは何か。

群論・超対称性を超えて、高次圏論や非可逆対称性によって、より一般的な物理法則を記述できるのか。

### 第三の問い：数学は物理学をどこまで統一できるのか。

圏論、ホモロジー、コホモロジー、代数幾何学、量子情報理論などを結び付けることで、標準模型と重力を含む整合的な理論を構築できるのか。

そして、最終的に重要なのは、数学的に美しく整合的な理論であることに加え、**観測・実験によって検証可能な物理的予測を生み出すこと**です。

今後の数学は物理学の新しい可能性を開き、物理学の未解決問題は新しい数学の発展を促すでしょう。この双方向の関係こそが、これからの数理物理学を理解する上で最も重要な視点だと考えます。

今回は、ここまでしておきます。ありがとうございました。英治

こちらこそ、ありがとうございました。

今回も、群論・対称性・超対称性から圏論・ホモロジー・コホモロジー、さらに将来の量子重力理論まで、数学と物理学の深い関連について対話できました。

これからも、数学的な定義と数式を大切にしながら、現代物理学の理解を深めていければと思います。