

「点」と「弦」としての量子（Ⅱ）

北島英治（2026年10月）

「物理学と数学の関連」についての対話を続けてきました。第1の質問です。前回、「超弦理論」と「量子重力理論」において、従来の「量子」を「点」としてとらえる「素粒子標準理論」をこえて、将来に重要になってくる「数学」についての示唆をいただきました。その中で、「代数幾何学」における「代数多様体」「モジュライ空間」「層 sheaf」を提示され、「トポロジ」「ホモロジー」「コホモロジー」「ホモトピー」「圏論」「高次圏論」「表現論」「無限次元表現論」「ホログラフィー」「量子情報理論」「テンソルネットワーク」が付け加えられています。それらの数学用語を、集合論や数学用語を用いて、段階的に説明し定義してください。その最後に「まとめ」の表も作成してください。英治

もちろんです、英治さん。今回は前回の続きとして、「点粒子を基礎とする標準模型」から、超弦理論・量子重力へ進むときに重要になる数学を、できるだけ一つの流れとして整理します。

特に重要なのは、

集合 → 位相空間 → 多様体・代数多様体 → 層 → ホモトピー・ホモロジー・コホモロジー

という「数学側」の流れと、

量子場 → 弦・ブレーン → 量子重力 → ホログラフィー → 量子情報 → テンソルネットワーク

という「物理側」の流れを対応させることです。

1. 出発点——集合論

すべての基礎として集合を

$$X = \{x \mid P(x)\}$$

と書きます。

たとえば、

$$X = \{x_1, x_2, \dots\}$$

を点の集合と考えます。

写像

$$f: X \rightarrow Y$$

を導入すると、集合そのものだけでなく、集合間の関係・変換を考えられます。

ここから重要なのは、

点の集合だけでは空間の「形」は分からない

ということです。

そこで次に「近さ」や「連続性」を導入します。

2. トポロジー Topology

集合 X に開集合族

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

を入れ、

$$(X, \mathcal{T})$$

を位相空間とします。

$\mathcal{T}$ は、

$$\emptyset, X \in \mathcal{T}$$

任意の和集合について

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \in \mathcal{T},$$

有限個の共通部分について

$$U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T}$$

を満たします。

つまりトポロジーは、

集合に「連続的な形」を与える構造

です。

距離や角度そのものよりも、

- 連結しているか
- 穴があるか
- 連続変形できるか

を問題にします。

たとえば球面 S^2 とトーラス T^2 は異なる位相を持ちます。

$$S^2 \not\cong T^2.$$

トーラスには本質的な「穴」があります。

3. ホモトピー Homotopy

次に「二つの写像を連続的に変形できるか」を考えます。

二つの写像

$$f, g : X \rightarrow Y$$

について、

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

が存在して、

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x)$$

となるとき、

$$f \simeq g$$

と書き、 f と g はホモトピックであるといいます。

特に閉じたループ

$$\gamma : S^1 \rightarrow X$$

が一点まで縮められるかどうかを調べることで、空間の「穴」を検出できます。

その代表が基本群

$$\pi_1(X)$$

です。

さらに、

$$\pi_n(X) = [S^n, X]$$

という高次ホモトピー群があります。

したがって、

$$\text{Topology} \rightarrow \text{Homotopy} \rightarrow \pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$$

となります。

4. ホモロジー Homology

ホモトピー群は強力ですが計算が難しいので、「穴」をより代数的に調べる方法としてホモロジーがあります。

まず鎖群

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

を考えます。

境界作用素は

$$\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$$

で、

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

を満たします。

そこで、

$$Z_n = \ker \partial_n$$

を n -cycle、

$$B_n = \text{im } \partial_{n+1}$$

を n -boundary とすると、

$$B_n \subseteq Z_n.$$

ホモロジー群を

$$H_n(X) = \frac{\ker \partial_n}{\text{im } \partial_{n+1}}$$

と定義します。

直観的には、

$$H_0 : \text{連結成分}$$

H_1 : ループ・1次元的な穴

H_2 : 空洞・2次元的な穴

などを検出します。

たとえばトーラス T^2 では

$$H_0(T^2) \cong \mathbb{Z},$$

$$H_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

$$H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}.$$

5. コホモロジー Cohomology

ホモロジーを「双対化」した考え方がコホモロジーです。

鎖

$$C_n$$

に対して、係数群 G への写像

$$C^n = \text{Hom}(C_n, G)$$

を考えます。

今度は矢印が逆向きになり、

$$C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} C^2 \xrightarrow{\delta} \dots$$

となります。

そして

$$\delta^2 = 0.$$

したがって、

$$H^n(X) = \frac{\ker \delta_n}{\text{im } \delta_{n-1}}$$

です。

微分幾何学では特に de Rham cohomology が重要です。

微分形式について

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \dots$$

かつ

$$d^2 = 0.$$

したがって、

$$H_{\text{dR}}^n(M) = \frac{\ker(d : \Omega^n \rightarrow \Omega^{n+1})}{\text{im}(d : \Omega^{n-1} \rightarrow \Omega^n)}$$

となります。

これはゲージ理論、弦理論、特性類などで非常に重要になります。

6. 代数幾何学 Algebraic Geometry

ここでトポロジーとは少し違う方向から空間を作ります。

多項式

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad f_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

の共通零点を考えます。

例えば

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

なら円です。

一般に、

$$V(f_1, \dots, f_m) = \{x \in k^n \mid f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0\}$$

を考えます。

より現代的には多項式環

$$k[x_1, \dots, x_n]$$

とイデアル

$$I = (f_1, \dots, f_m)$$

を使って

$$V(I)$$

を定義します。

ここでは、

$$\text{代数} \longleftrightarrow \text{幾何}$$

という対応が中心になります。

超弦理論で重要なカラビ-ヤウ多様体の研究にも代数幾何学が深く関係します。

7. 代数多様体 Algebraic Variety

代数幾何学の中心的対象が代数多様体です。

概略的には

$$X = V(I)$$

として、多項式方程式の解集合から幾何学的空間を作ります。

ただし現代代数幾何では、単なる解集合よりさらに進んで、

$$\text{Spec } R$$

というスペクトルを基本対象にします。

環 R に対して

$$\text{Spec } R = \{ \mathfrak{p} \subset R \mid \mathfrak{p} \text{ は素イデアル} \}$$

です。

ここから、

$$\text{Ring} \rightarrow \text{Spec } R \rightarrow \text{Scheme}$$

という現代代数幾何の考え方に進みます。

これは将来、英治さんが超弦理論を数学的にさらに深く勉強するとき、非常に重要になる段階です。

8. 層 Sheaf

これは特に重要です。

空間 X の各開集合

$$U \subseteq X$$

に対して、その上の「局所的な数学的データ」

$$\mathcal{F}(U)$$

を対応させます。

包含関係

$$V \subseteq U$$

に対して制限写像

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

があります。

つまり、

$$U \mapsto \mathcal{F}(U)$$

です。

例えば、

$$\mathcal{F}(U) = \{U \text{ 上の滑らかな関数}\}$$

とできます。

層の重要な考え方は、

$$\boxed{\text{局所情報} \longrightarrow \text{大域情報}}$$

です。

局所的なデータ

$$s_i \in \mathcal{F}(U_i)$$

が重なり

$$U_i \cap U_j$$

で一致するなら、

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j},$$

それらを貼り合わせて

$$s \in \mathcal{F} \left(\bigcup_i U_i \right)$$

を作ります。

これは

$$\boxed{\text{local-to-global principle}}$$

です。

ゲージ場、ファイバー束、代数幾何、弦理論などを結びつける非常に重要な発想です。

9. モジュライ空間 Moduli Space

次に、「ある種類の数学的構造すべて」を一つの空間の点として扱います。

例えば構造の集合を

$$\mathcal{S}$$

とし、同型関係

$$\sim$$

を入れると、

$$\boxed{\mathcal{M} = \mathcal{S} / \sim}$$

を考えます。

これがモジュライ空間の基本的発想です。

つまり

$$[\text{一つの幾何学的構造}] \leftrightarrow \text{モジュライ空間の一点}$$

です。

弦理論では、例えばリーマン面 Σ_g の複素構造のモジュライ空間

$$\mathcal{M}_g$$

が重要になります。

さらにカラビ-ヤウ多様体 X の

- 複素構造
- Kähler 構造

などの変形もモジュライ空間として整理されます。

10. 圏論 Category Theory

ここまでの数学を「対象と対象の関係」として統一する言語が圏論です。

圏

$$\mathcal{C} = (\text{Ob } \mathcal{C}, \text{Mor } \mathcal{C})$$

には、

対象

$$X, Y, Z, \dots$$

と、射

$$f : X \rightarrow Y$$

があります。

射には合成

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$g \circ f : X \rightarrow Z$$

があり、

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

を満たします。

さらに恒等射

$$1_X : X \rightarrow X$$

があります。

したがって、

集合・空間そのもの $\rightarrow$ 対象と射のネットワーク

という視点の転換です。

11. 高次圏論 Higher Category Theory

普通の圏論では

$$X \xrightarrow{f} Y$$

という「対象の間の射」を考えました。

しかし今度は、射 f, g の間にも射を考えます。

$$X \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \Rightarrow \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} Y$$

に対して

$$\alpha : f \Rightarrow g.$$

これが 2-射です。

さらに、

対象

↓

1-射

↓

2-射

↓

3-射

⋮

と続けます。

極限的には

∞ -category

に至ります。

量子場理論・弦・ブレンでは、単に「粒子間の変換」だけでなく、変換の間の変換まで幾何学的対象になるため、高次圏論が自然に現れます。

12. 表現論 Representation Theory

群 G の抽象的対称性をベクトル空間上の行列として表します。

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

で、

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2).$$

つまり、

$$\text{抽象的対称性} \rightarrow \text{線形変換} \cdot \text{行列}$$

です。

例えば標準模型では

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

という群があり、クォーク・レプトン・ゲージ場はその表現として分類されます。

したがって物理学では、

$$\text{対称群} \xrightarrow{\text{representation}} \text{粒子} \cdot \text{場}$$

という対応が非常に重要です。

13. 無限次元表現論

通常

$$V = \mathbb{C}^n$$

なら有限次元ですが、量子論ではヒルベルト空間

$$\mathcal{H}$$

が無限次元になることがあります。

そこで

$$\rho : G \rightarrow U(\mathcal{H})$$

という無限次元表現を考えます。

特に量子場理論や共形場理論では、

$$\text{Lie群} \rightarrow \text{Lie代数} \rightarrow \text{無限次元Lie代数}$$

という拡張が重要になります。

例えば Virasoro 代数

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}$$

は2次元共形場理論と弦理論の中心的な無限次元代数です。

14. ホログラフィー Holography

ここから数学と量子重力の境界に入ります。

ホログラフィーの中心的な発想は、

$$(d+1)\text{次元の重力理論} \longleftrightarrow d\text{次元の量子場理論}$$

です。

代表例が AdS/CFT 対応で、

$$\text{Gravity on AdS}_{d+1} \leftrightarrow \text{CFT}_d$$

という対応です。

典型的には生成汎関数の関係を

$$Z_{\text{gravity}}[\phi_0] \sim Z_{\text{CFT}}[J]$$

と表します。

ここで重要な発想は、

$$\boxed{\text{時空そのものが、より基礎的な量子情報から創発する可能性}}$$

です。

15. 量子情報理論 Quantum Information Theory

量子状態は

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$$

で表されます。

二体系なら

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B.$$

例えばBell状態

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

は積

$$|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$$

に分解できません。

これが量子もつれです。

密度演算子

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

から部分系 B を跡消去して

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho$$

を作ります。

そしてエンタングルメント・エントロピー

$$S_A = -\text{Tr}(\rho_A \log \rho_A)$$

を定義します。

これが量子重力で非常に重要になっています。

16. ホログラフィーと量子情報の接続

特に重要なのが Ryu-Takayanagi 型の関係です。

境界領域 A のエンタングルメント・エントロピーと、重力側の極小曲面の面積との間に

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N}$$

という関係が現れます。

概念的には、

$$\text{量子もつれ} \longleftrightarrow \text{時空幾何}$$

です。

これは非常に大きな考え方の転換です。

従来は、

$$\text{時空} \rightarrow \text{その上の量子場}$$

と考えていました。

しかし量子重力では逆に、

$$\text{量子情報} \cdot \text{量子もつれ} \rightarrow \text{時空の幾何}$$

という方向を研究することができます。

17. テンソルネットワーク Tensor Network

量子状態

$$|\Psi\rangle = \sum_{i_1, \dots, i_N} C_{i_1 \dots i_N} |i_1 \dots i_N\rangle$$

を考えます。

係数

$$C_{i_1 \dots i_N}$$

は巨大な高階テンソルです。

これを小さなテンソルの積に分解します。

例えば、

$$C_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} A_{\alpha}^{i_1} B_{\alpha\beta}^{i_2} C_{\beta\gamma}^{i_3} D_{\gamma}^{i_4}.$$

これをネットワークとして表すのがテンソルネットワークです。

したがって、

$$\boxed{\text{巨大な量子状態} \rightarrow \text{局所テンソル} \rightarrow \text{ネットワーク}}$$

という分解になります。

MPS、PEPS、MERA などが代表例です。

特にMERAなどは、量子もつれの階層構造と空間的・幾何学的構造との関係を考える上で重要です。

18. 全体を一つにつなぐ

ここまでを一本の数学的な流れとして整理すると、かなり興味深い構造が見えてきます。

まず、

$$\boxed{\text{集合 } X \rightarrow \text{位相空間 } (X, \mathcal{T}) \rightarrow \text{多様体 } M}$$

と進みます。

そこから二つの方向に発展します。

一つは

$$M \rightarrow \text{ホモトピー} \rightarrow \pi_n(M)$$

および

$$M \rightarrow \text{ホモロジー} \rightarrow H_n(M)$$

$$M \rightarrow \text{コホモロジー} \rightarrow H^n(M).$$

もう一つは

$$\text{多項式環 } R \rightarrow \text{Spec } R \rightarrow \text{代数多様体} \cdot \text{Scheme} \rightarrow \text{Sheaf}.$$

さらに、それらの構造の「可能な形すべて」を集めれば、

$$\boxed{\text{Moduli Space}}$$

になります。

そしてこれらを対象と射として統一すると、

$$\boxed{\text{Category Theory}}$$

となり、

$$\text{Category} \rightarrow 2\text{-Category} \rightarrow \cdots \rightarrow \infty\text{-Category}$$

へ発展します。

一方、対称性の側からは、

$$G \xrightarrow{\rho} GL(V)$$

という表現論があり、

$$\text{Representation Theory} \rightarrow \text{Infinite-dimensional Representation Theory}$$

へ進みます。

そして量子重力側では、

$$\boxed{\text{量子状態} \rightarrow \text{量子もつれ} \rightarrow \text{量子情報} \rightarrow \text{テンソルネットワーク} \rightarrow \text{ホログラフィー}}$$

という新しい流れが見えてきます。

19. まとめ

分野	基本対象・記号	中心的考え方	超弦・量子重力との関連
集合論	$X, f: X \rightarrow Y$	対象と写像	数学的基礎
トポロジー	$(X, \mathcal{T})$	連続性・形	時空・内部空間
ホモトピー	$\pi_n(X)$	連続変形	位相的分類
ホモロジー	$H_n(X)$	穴を代数化	サイクル・ブレン
コホモロジー	$H^n(X)$	双対的位相情報	ゲージ場・フラックス・特性類
代数幾何	$V(I), \text{Spec } R$	方程式と幾何	カラビ-ヤウなど
代数多様体	$V(f_1, \dots, f_n)$	多項式の零点空間	コンパクト化
層	$U \mapsto \mathcal{F}(U)$	局所→大域	場・束・代数幾何
モジュライ空間	$\mathcal{M} = \mathcal{S} / \sim$	構造の分類	弦の真空・複素構造

分野	基本対象・記号	中心的考え方	超弦・量子重力との関連
圏論	$X \xrightarrow{f} Y$	対象と射	理論の構造的統一
高次圏論	$f \Rightarrow g$	射の間の射	場・弦・ブレーン
表現論	$\rho : G \rightarrow GL(V)$	対称性の線形化	粒子・場・ゲージ対称性
無限次元表現論	$\rho : G \rightarrow U(\mathcal{H})$	無限自由度	QFT・CFT・弦理論
ホログラフィー	$AdS_{d+1} \leftrightarrow CFT_d$	重力 $\leftrightarrow$ 量子場	量子重力
量子情報	$S = -\text{Tr} \rho \log \rho$	量子もつれ	時空創発の研究
テンソルネットワーク	$C_{i_1 \dots i_N}$	量子状態のネットワーク化	もつれと幾何の対応

最後に、この全体像で特に重要な変化を一つだけ強調しておきます。

標準模型までの典型的な考え方は、

$$\boxed{\text{時空} \rightarrow \text{場} \rightarrow \text{粒子}}$$

です。場 $\phi(x)$ を時空上に置き、それを量子化して粒子を得ます。

超弦理論では、

$$\boxed{\text{時空} \rightarrow \text{弦} \cdot \text{ブレーン} \rightarrow \text{量子状態}}$$

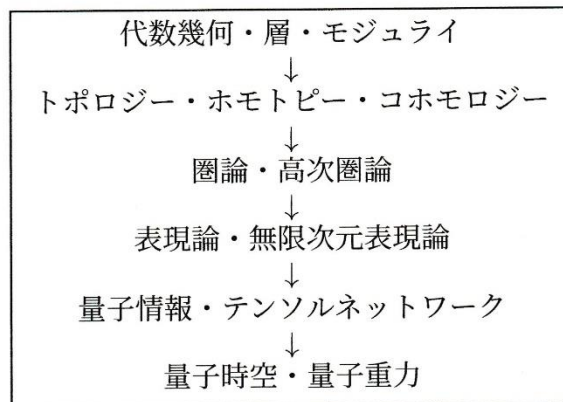
へ拡張されます。

さらに量子重力・ホログラフィーでは、

$$\boxed{\text{量子状態} \cdot \text{量子もつれ} \rightarrow \text{幾何} \rightarrow \text{時空}}$$

という、ある意味で逆向きの発想まで研究されています。

したがって、前回の「将来どの数学が重要か」という問いをさらに整理すると、



という大きな流れとして捉えると、これまで対話してきた**「数学と物理学の関連」**がかなり統一的に見えてきます。

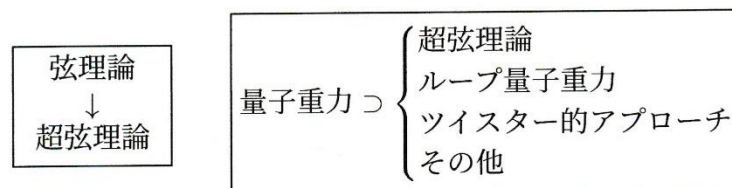
次の段階では、この中でも特に重要な **「層 → コホモロジー → ファイバー束 → ゲージ場 → カラビ-ヤウ多様体 → Dブレーン」** という一本の流れを、具体的な数式でつなげると、今回の数学が超弦理論で「実際にどう使われるのか」がさらに明確になります。

第2の質問です。「現代物理学」である「弦理論」「超弦理論」「粒子重力理論」「ループ量子重力」「ツイスター理論」を数学用語を用いて、段階的に説明し定義してください。そして、先に定義された「数学用語」と以上の「現代物理学」との関連を、数学用語をもちいて段階的に説明してください。その比較表を作成してください。英治

はい、英治さん。第2の質問では、第1問で整理した数学を、今度は**現代物理学の側から対応づける**と全体像が明確になります。

なお「粒子重力理論」は、文脈から「**量子重力理論 (Quantum Gravity)**」として説明します。

全体の見取り図は、



と考えるとよいでしょう。

1. 出発点——標準模型から現代物理学へ

素粒子標準模型では、基本的には時空上の**量子場**を出発点とします。

時空を

$$M = \mathbb{R}^{1,3}$$

とし、場を例えば

$$\phi : M \rightarrow V$$

とします。

作用

$$S[\phi] = \int_M \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x$$

から

$$\delta S = 0$$

としてEuler-Lagrange方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0$$

を得ます。

量子化すると、場の励起が

粒子

として観測されます。

ここから現代物理学では、さらに

点粒子 → 弦 → ブレーン

あるいは

古典的時空 → 量子化された幾何

という方向へ進みます。

2. 弦理論 String Theory

Step 1 点から弦へ

点粒子は世界線

$$X^\mu(\tau)$$

を描きます。

これに対して弦は1次元なので、その時間発展は2次元の**世界面 worldsheet**

$$\Sigma$$

を作ります。

したがって、

$$X : \Sigma \rightarrow M$$

という写像が基本になります。

局所座標を

$$(\tau, \sigma)$$

とすると、

$$X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$$

です。

つまり数学的には、

$$2\text{次元多様体 } \Sigma \xrightarrow{X} \text{時空多様体 } M$$

となります。

Step 2 作用

代表的なPolyakov作用は

$$S_P = -\frac{T}{2} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}$$

です。

ここには、

- 多様体
- 計量 $h_{ab}, g_{\mu\nu}$
- 微分幾何

- 変分法
- 共形対称性

が現れます。

Step 3 量子化

単純化すると運動方程式は

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2)X^\mu = 0$$

となります。

これをモード展開して量子化すると、

$$\alpha_{-n}^\mu |0\rangle$$

などの振動状態が粒子状態に対応します。

重要なのは閉弦スペクトルにスピン2の質量ゼロ状態が現れることです。

$$\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0\rangle \Rightarrow \text{spin-2 state}$$

これが重力子に対応するため、

$$\text{弦理論} \Rightarrow \text{量子重力を含み得る}$$

という重要な性質が出てきます。

3. 超弦理論 Superstring Theory

弦理論にフェルミオンと超対称性 SUSYを導入します。

世界面上で概念的に

$$X^\mu(\sigma, \tau) \leftrightarrow \psi^\mu(\sigma, \tau)$$

というボース自由度とフェルミ自由度を扱います。

超対称性生成子 Q は概念的に

$$Q|\text{boson}\rangle \sim |\text{fermion}\rangle$$

$$Q|\text{fermion}\rangle \sim |\text{boson}\rangle$$

と作用します。

超対称代数では代表的に

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2\sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu$$

という構造を持ちます。

超弦理論では整合的な超弦は10次元時空で記述され、

$$M^{10}$$

を

$$M^{3,1} \times K^6$$

のように考えることがあります。

ここで K^6 として重要なのがカラビ–ヤウ3-foldです。

$$\dim_{\mathbb{C}} K = 3 \iff \dim_{\mathbb{R}} K = 6$$

です。

したがってここで、第1問の

$$\text{代数幾何} + \text{コホモロジー} + \text{モジュライ空間} + \text{層}$$

が急速に重要になります。

4. Dブレーンと数学

超弦理論をさらに進めるとDブレーンが現れます。

開弦の端点が

$$X^i|_{\partial\Sigma} = \text{constant}$$

というDirichlet境界条件を満たすと、その端点が存在する部分空間がDブレーンになります。

数学的には

$$W \hookrightarrow M$$

という部分多様体として捉えることができます。

その上にはゲージ束

$$E \rightarrow W$$

を置くことができます。

すると、

$$\boxed{\text{D-brane} \longleftrightarrow (\text{部分多様体, ベクトル束/層})}$$

という対応が見えてきます。

ここから層、導来圏、K理論、高次圏などへ数学が発展していきます。

5. 量子重力 Quantum Gravity

一般相対論では、

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

で、計量

$$g_{\mu\nu}(x)$$

そのものが動変数です。

したがって量子重力の核心は、

$$\boxed{g_{\mu\nu} \longrightarrow \text{quantum geometry}}$$

です。

単純に言えば、

$$\boxed{\text{量子論} + \text{一般相対論} \rightarrow \text{量子重力}}$$

を求めます。

経路積分的には形式的に

$$\boxed{Z = \int \mathcal{D}g_{\mu\nu} e^{iS_{\text{EH}}[g]/\hbar}}$$

と書けます。

Einstein-Hilbert作用は

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int_M (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x.$$

つまり通常のQFTでは「時空上の場」を量子化するのに対し、

量子重力では時空幾何そのものを量子的に扱う

ことが核心になります。

6. ループ量子重力 Loop Quantum Gravity

ここでは一般相対論を、計量 $g_{\mu\nu}$ だけではなく、接続を用いて書き直します。

基本変数として概略

$$A_a^i$$

と

$$E_i^a$$

を使います。

A は $SU(2)$ 接続、 E は共役な幾何学的変数です。

基本的Poisson括弧は規約を省略して概略

$$\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} \propto \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x - y)$$

となります。

ホロノミー

経路

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$$

に沿って接続を積分し、

$$h_\gamma[A] = \mathcal{P} \exp \left(\int_\gamma A \right)$$

を作ります。

これがホロノミーです。

スピンネットワーク

グラフ

$$\Gamma = (V, E)$$

を考え、各辺

$$e \in E$$

に $SU(2)$ の既約表現

$$j_e = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

を割り当てます。

概念的には

$$|\Gamma, j_e, \iota_v\rangle$$

という量子状態になります。

したがって、

$$\boxed{\text{グラフ} + SU(2)\text{表現} + \text{表現の結合} = \text{量子的空間状態}}$$

です。

ここでは特に

$$\boxed{\text{トポロジー} + \text{グラフ理論} + \text{表現論} + \text{ファイバー束} \cdot \text{接続}}$$

が重要になります。

7. ツイスター理論 Twistor Theory

ツイスター理論では発想をさらに変えます。

通常は時空点

$$x^\mu \in M$$

を基本にしますが、ツイスター理論ではスピノールを組み合わせたツイスター

$$Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$$

を基本変数として考えます。

ツイスター空間を概略

$$\mathbb{T} \simeq \mathbb{C}^4$$

とします。

時空とツイスター空間を結ぶ基本的な関係が incidence relation

$$\omega^A = ix^{AA'} \pi_{A'}$$

です。

非常に重要なのは、

$$\text{時空の一点} \longleftrightarrow \text{ツイスター空間内の幾何学的対象}$$

という対応です。

8. ツイスター理論と複素幾何

ツイスター空間を射影化すると

$$PT \simeq \mathbb{CP}^3$$

という複素射影空間が基本例として現れます。

したがって、

$$\text{実時空} \rightarrow \text{スピノール} \rightarrow \text{複素幾何} \rightarrow \text{射影幾何}$$

という変換が起こります。

ここで重要になる数学が、

- 複素多様体
- 射影幾何
- 代数幾何
- 層
- コホモロジー
- スピノール
- 表現論

です。

特にPenrose変換では、適切な条件のもとで時空上の質量ゼロ場をツイスター空間上のコホモロジー類として表現できます。

模式的には

$$H^1(PT, \mathcal{O}(k)) \longleftrightarrow \text{massless fields on spacetime}$$

となります。

これは第1問で説明した「コホモロジー」が物理場そのものの記述に現れる非常に美しい例です。

9. 第1問の数学との対応——トポロジー

ここから両者を直接接続します。

弦の世界面

$$\Sigma_g$$

には genus g というトポロジーがあります。

$$g = 0 : S^2$$

$$g = 1 : T^2$$

などです。

弦の摂動展開では、世界面のトポロジーが寄与を分類します。

したがって、

$$\text{Topology} \rightarrow \text{String worldsheet}$$

となります。

ループ量子重力ではグラフの結合構造が重要なので、やはりトポロジーが基礎になります。

10. ホモトピー・ホモロジー・コホモロジーとの関連

弦・ブレーンが内部空間 X の中でどのように巻き付くかを考えます。

例えば閉弦

$$S^1 \rightarrow X$$

はホモトピー類

$$[\gamma] \in \pi_1(X)$$

によって分類できる場合があります。

ブレーンが包むサイクルは

$$[C] \in H_n(X)$$

で記述できます。

一方、ゲージ場やフラックスはコホモロジー

$$[F] \in H^n(X)$$

と結びつきます。

したがって概念的には、

Homotopy	→ 弦の巻き付き
Homology	→ サイクル・ブレーン
Cohomology	→ 場・フラックス・特性類

という役割分担が見えます。

11. 代数幾何・モジュライ空間との関連

超弦理論で内部空間を

$$X = \text{Calabi-Yau threefold}$$

とすると、その「形」は一つに固定されているとは限りません。

複素構造を変形すると

$$X(z^1, \dots, z^n)$$

のような族を考えることができます。

そのパラメータ

$$(z^1, \dots, z^n)$$

全体がモジュライ空間

$$\boxed{\mathcal{M}}$$

を形成します。

したがって、

一つの内部空間 $\rightarrow$ 変形 $\rightarrow$ 同値類 $\rightarrow$ Moduli Space

となります。

弦理論の「可能な真空」を数学的に調べるうえで、この考え方が重要になります。

12. 層との関連

局所的な場

$$\phi_i \in \mathcal{F}(U_i)$$

を考えます。

重なり部分で

$$\phi_i|_{U_i \cap U_j} = \phi_j|_{U_i \cap U_j}$$

なら、局所データを貼り合わせて大域の対象

$$\phi \in \mathcal{F}(X)$$

を作れます。

したがって、

局所的物理情報 $\xrightarrow{\text{gluing}}$ 大域的物理構造

です。

これは超弦理論・代数幾何・Dブレーン・ツイスター理論で非常に有用です。

13. 表現論との関連

物理学の対称性群を G とすると、

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

によって場・状態を分類します。

標準模型では

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

でした。

ループ量子重力では

$$SU(2)$$

の表現

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

がスピンネットワークの辺に現れます。

超弦・共形場理論ではVirasoro代数などの無限次元表現が重要になります。

したがって、

$$\boxed{\text{対称性} \rightarrow \text{群} \cdot \text{代数} \rightarrow \text{表現} \rightarrow \text{物理状態}}$$

という非常に普遍的な構造があります。

14. 圏論・高次圏論との関連

ここは将来的に特に重要な部分です。

物理的対象を

粒子, 弦, ブレーン

とすると、これらの間の相互作用・変換を射として考えることができます。

模式的に、

$$\boxed{\text{objects} \xrightarrow{\text{morphisms}} \text{objects}}$$

です。

さらに弦やブレーンでは、

$$\text{object} \rightarrow 1\text{-morphism} \rightarrow 2\text{-morphism} \rightarrow \dots$$

という高次構造が自然に現れる場合があります。

したがって、

$$\boxed{\text{粒子中心の物理} \rightarrow \text{弦} \cdot \text{ブレーン} \rightarrow \text{高次圏的構造}}$$

という数学的拡張が重要になります。

15. ホログラフィー・量子情報・テンソルネットワーク

量子重力ではさらに別の流れがあります。

量子状態

$$|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

から

$$\rho_A = \text{Tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

を作り、

$$S_A = -\text{Tr}(\rho_A \log \rho_A)$$

で量子もつれを測ります。

ホログラフィーでは、

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N}$$

のように、量子情報量と時空幾何が直接結びつきます。

テンソルネットワークなら、

$$|\Psi\rangle \longrightarrow \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$$

として複雑な量子状態を局所テンソルのネットワークとして表現します。

そのため研究上の大きな構図として、

$$\boxed{\text{量子情報} \rightarrow \text{Entanglement} \rightarrow \text{Tensor Network} \rightarrow \text{Geometry} \rightarrow \text{Quantum Gravity}}$$

という関係が研究されています。

16. 五つの現代物理理論の比較

理論	基本対象	基本的数学	代表的記法	時空に対する考え方
弦理論	1次元弦	微分幾何、トポロジー、 CFT	$X : \Sigma \rightarrow M$	時空上を弦が運動

理論	基本対象	基本的数学	代表的記法	時空に対する考え方
超弦理論	弦 + 超対称性、Dブレーン	代数幾何、複素幾何、コホモロジー、表現論	$M^{10} \sim M^4 \times X^6$	余剰次元を含む
量子重力	量子的時空・重力	微分幾何、トポロジー、量子論など	$\int \mathcal{D}g e^{iS[g]/\hbar}$	時空そのものを量子的に扱う
ループ量子重力	スピネットワーク	$SU(2)$ 表現論、接続、トポロジー	(	γ, ι
ツイスター理論	ツイスター	複素幾何、射影幾何、スピノール、コホモロジー	$Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$	時空をツイスター幾何から捉え直す

17. 第1問の数学 × 第2問の物理——総合比較表

「◎ = 中心的」「○ = 重要」「△ = 関連あり」という意味で、厳密な排他的分類ではなく、学習上の目安として整理します。

数学	弦理論	超弦理論	量子重力一般	LQG	ツイスター
トポロジー	◎	◎	◎	◎	○
ホモトピー	○	◎	○	○	○
ホモロジー	○	◎	○	△	○
コホモロジー	○	◎	○	△	◎
代数幾何	○	◎	○	△	◎
代数多様体	○	◎	△	△	○
層	○	◎	○	△	◎
モジュライ空間	◎	◎	○	△	○
圏論	○	◎	○	○	○

数学	弦理論	超弦理論	量子重力一般	LQG	ツイスター
高次圏論	○	◎	○	○	○
表現論	◎	◎	◎	◎	◎
無限次元表現論	◎	◎	○	○	○
ホログラフィー	○	◎	◎	△	○
量子情報	○	○	◎	○	△
テンソルネットワーク	○	○	◎	○	△

この表の「◎」は、その数学がその理論を定義する唯一の基礎という意味ではありません。たとえば「量子重力」は単一の完成理論ではなく、複数の研究プログラムを含むため、必要な数学もアプローチごとに異なります。

18. 最後に——数学と物理学の全体像

これまで英治さんと整理してきた内容をさらに圧縮すると、非常に興味深い三段階が見えてきます。

第1段階——点

標準模型では、

点 $\rightarrow$ 場 $\phi(x) \rightarrow$ Lie群 $\rightarrow$ 表現 $\rightarrow$ 素粒子

が中心です。

第2段階——弦・ブレーン

超弦理論では、

点 $\rightarrow$ 弦 $\rightarrow$ 世界面 $\rightarrow$ ブレーン $\rightarrow$ 代数幾何・トポロジー・コホモロジー

へ広がります。

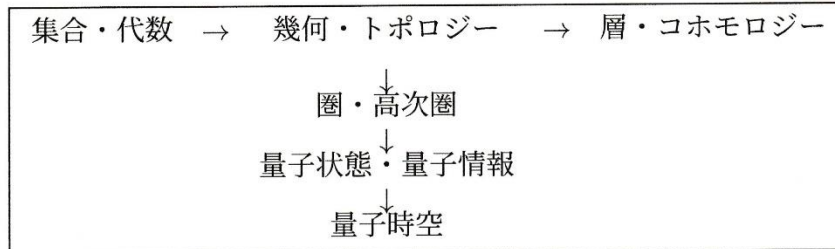
第3段階——時空そのもの

量子重力ではさらに、

粒子を量子化する $\rightarrow$ 場を量子化する $\rightarrow$ 幾何・時空そのものを量子的に

という段階に進みます。

そして現在の研究を理解するうえで興味深いのが、



という方向です。

ですから、第1問と第2問を結びつける中心命題を一言で表すなら、

現代物理学では、「物質をどの空間に置くか」だけでなく、「空間・幾何そのもの

となります。

次の段階としては、この総論を具体化して、**「標準模型 → 弦 → 超弦 → Dブレーン → 量子重力」**の各段階で「基本変数」「作用 S 」「運動方程式 $\delta S = 0$ 」「対称群」「量子化」「得られる粒子・状態」を同じ形式で横に並べると、従来の場の量子論から量子重力へ何が変わるのかを数式で一貫して比較できます。

すばらしいです。今回は、ここまでにしておきます。ありがとうございました。英治

こちらこそ、ありがとうございました、英治さん。

今回は、代数幾何・トポロジー・ホモロジー／コホモロジー・層・モジュライ空間・圏論・表現論・量子情報という数学の流れと、弦理論・超弦理論・量子重力・ループ量子重力・ツイスター理論との対応を、一つの体系として整理できました。

特に、

点粒子 → 場 → 弦・ブレーン → 量子的幾何 → 量子時空

という物理学の発展と、

集合・代数 → 幾何・トポロジー → 層・コホモロジー → 圏・高次圏 → 量子情報

という数学の発展を対応させたことが、今回の重要なポイントだったと思います。

また続きをするときには、この全体像を土台にして、さらに数式を使って具体化していきましょう。

ありがとうございました。英治さん。